ISSN 2713-2730

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «НАБЕРЕЖНОЧЕЛНИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Научно-теоретический журнал

ВЕСТНИК

Набережночелнинского государственного педагогического университета

Материалы IV Международной научно-практической конференции

«ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

г. Набережные Челны, 25 марта 2022 г.

Materials IV International Scientific and Practical Conference

«PROSPECTS FOR THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL EDUCATION AND INFORMATION TECHNOLOGIES»

Naberezhnye Chelny, March 25, 2022

Scientific and theoretical journal

BULLETIN

of Naberezhnye Chelny state pedagogical University

2022 / 2 (37) СПЕЦВЫПУСК

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «НАБЕРЕЖНОЧЕЛНИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Научно-теоретический журнал

ВЕСТНИК

Набережночелнинского государственного педагогического университета

№2 (37) • Апрель • 2022 • Спецвыпуск

Scientific and theoretical journal

BULLETIN

of Naberezhnye Chelny state pedagogical University

№2 (37) • April • 2022 • Special issue

Набережные Челны – 2022

Научно-теоретический журнал

ВЕСТНИК

Набережночелнинского государственного педагогического университета

ISSN: 2713-2730 №2 (37) • Апрель • 2022 • Спецвыпуск

Издается с 1995 г. До 2016 года назывался «Вестник НГПИ»

Учредитель: ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет»

Адрес редакции и издательства: 423806, Республика Татарстан, г. Набережные Челны, ул. Низаметдинова Р.М., д. 28

Контактные телефоны: (8552) 46-62-16; 46-49-15. Факс: (8552) 46-97-06. E-mail: rio@tatngpi.ru (с пометкой «Вестник НГПУ»).
ISSN: 2713-2730. Полнотекстовая версия выпуска размещена в свободном доступе в Российской универсальной библиотеке (РУНЭБ) elibrary.ru

Подписано в печать 25.04.2022. Формат 60х90 1/8. Усл. печ. л. 9. Тираж печатный: 100 экз.
Отпечатано в ЦИТ ФГБОУ ВО «НГПУ». При цитировании ссылка на журнал обязательна.

Scientific and theoretical journal

BULLETIN

of Naberezhnye Chelny state pedagogical University

ISSN: 2713-2730 №2 (37) • April • 2022 • Special issue

Published since 1995. It was called "Bulletin of NGPI» up to 2016

Founders: Naberezhnye Chelny State Pedagogical University

Address of the Editorial Ofce and the Publisher: 28, Nizametdinova Street, Naberezhnye Chelny, 423806

Phone: (8552) 46-62-16; 46-49-15. Fax: (8552) 46-97-06. E-mail: rio@tatngpi.ru (with a mark «Vestnik NGPU»).
ISSN: 2713-2730 The full-text version of the edition is placed in free access in the Russian Scholarly Electronic Library (RUNEB): elibrary.ru

Signed in for printing 25.04.2022. Format: 60x90 1/8.Printing l. 9. Run of 100 copies (Print). Printed in ITC of Naberezhnye Chelny State Pedagogical University. When quoting, a reference to the journal is obligatory.

Содержание Contents

Доклады участников
IV Международной научно-практической конференции «Перспективы развития математического образования и информационных технологий»
г. Набережные Челны, 25 марта 2022 г.

Reports of participants
IV International Scientific and Practical Conference «Prospects for the development of mathematical education and information technologies»
Naberezhnye Chelny, March 25, 2022

СЕКЦИЯ 3. СОВРЕМЕННЫЕ ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

СЕКЦИЯ 4. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Материалы
IV Международной
научно-практической конференции

«ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

г. Набережные Челны, 25 марта 2022 г.

Materials
IV International
Scientific and Practical Conference

«PROSPECTS FOR THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL EDUCATION AND INFORMATION TECHNOLOGIES»

Naberezhnye Chelny, March 25, 2022

ПЛЕНАРНОЕ ЗАСЕДАНИЕ IV МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

УДК 51(09)

Асланов Р.М.

Штрихи к портрету И.И. Ибрагимова (к 110 –летнему юбилею)

Статья посвящена жизни и деятельности Ибрагимова И.И., его научному наследию и роли в развитии создании школы теории функций в Азербайджане, а также его монографии, учебникам и учебным пособиям для вузов и др.

Ключевые слова: математика, теория функций, интерполяция, аппроксимация, учебники, педагог

Aslanov Ramiz Mutallim oglu

Stroke to the Portrait of I.I. Ibrahimov (to the 110th Anniversary)

The article is devoted to the life and work of Ibrahimov I.I., his scientific heritage and role in the development of the creation of the school of function theory in Azerbaijan, as well as his monographs, textbooks and teaching aids for universities, etc.

Keywords: mathematics, function theory, interpolation, approximation, textbooks, teacher

Мы с Ибрагимом Ибишевичем были не только коллегами, но и большими друзьями.
Академик С.М. Никольский

Ибрагимов Ибрагим Ибиш оглы, конечно, многое мог бы дать науке, если бы ему было больше отмерено свыше...

Ибрагимов Ибрагим Ибиш оглы – доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Азербайджана, специалист в области теории функций, теории приближения, создатель школы теории функций в Азербайджане.

Ибрагимов Ибрагим Ибиш оглы родился 28 февраля 1912 года

в селении Гаргабазар Физулинского района Азербайджанской Республики. В 1935 году с отличием окончил физико-математический факультет Азербайджанского педагогического института по специальности «математика». В том же году поступил в аспирантуру Бакинского государственного университета, а годом позже перевелся в МГУ им. М.В. Ломоносова. В 1939 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «О полноте некоторых систем аналитических функций» (01.01.01) под руководством чл.-корр. АН СССР, профессора А.О. Гельфонда в МГУ

им. М.В. Ломоносова. В 1947 году он защитил докторскую диссертацию на тему «Некоторые проблемы теории интерполяции и аппроксимации функций» (01.01.01) в ИМ АН РСФСР им. Стеклова, г. Москва.

И.И. Ибрагимов начал трудовую деятельность в 1935 г. в городе Баку преподавателем математики в Институте повышения квалификации инженеров. В этой должности он проработал два года. После окончания аспирантуры в 1939–1947 гг. занимал должность доцента кафедры «Теория функций» БГУ, а также профессора Кировабадского педагогического института им. Г.Б. Зардаби (ныне Гянджинский государственный университет). В 1947–1958 гг., оставаясь профессором БГУ, становится зав. Кафедрой математического анализа Азербайджанского педагогического института им В.И.Ленина (ныне Азербайджанский государственный педагогический университет). С 1958 года его научно-педагогическая деятельность связана с Национальной академией наук Азербайджана. В 1958–1959 гг. он занимал должность зав. отделом Института физики и математики НАН Азербайджана. В 1958–1963 гг. – возглавлял институт, а

с 1963 года и до конца своей жизни И.И. Ибрагимов заведовал отделом «Теория функций» Института математики и механики НАН Азербайджана. С 1977 года параллельно являлся председателем Математического общества Азербайджана.

И.И. Ибрагимов был участником крупных международных конференций, конгрессов, съездов по математике в Стокгольме (Швеция, 1962), Варне (Болгария, 1974, 1981), Праге (Чехословакия, 1974), Будапеште (Венгрия, 1968), Ницце (Франция, 1970), Познани (Польша, 1974), а также Москве, Баку, Калуге, Харькове, Киеве, Ленинграде, Уфе и других городах СССР.

Академик И.И.Ибрагимов считается родоначальном нескольких направлений в азербайджанской математике: теории интерполяции функций, полноты систем аналитических функций, теории приближения полиномами и специальными функциями. Его исследования и результаты легли в основу множества фундаментальных трудов. И.И. Ибрагимов, исследуя критерии полноты ряда важных систем, решил обобщенную проблему Карлемана. Им был найден точный критерий представимости любой целой функции в виде интерполяционного ряда Ньютона (совместно с М.В. Келдышем) и в виде интерполяционного ряда Абеля – Гончарова, изучена проблема единственности аналитических функций, производные которых равны нулю в двух точках. Эти результаты вошли в математическую литературу под названием «Проблема о двух точках». Также академик исследовал экстремальные свойства целых функций. Ибрагимовым найдены порядки наилучшего приближения функций комплексного переменного в бесконечных областях посредством целых функций. Он работал в тесной связи с выдающимися советскими математиками: М.В. Келдышем, С.Н. Бернштейном, А.О. Гельфондом, М.А. Лаврентьевым, А.И. Маркушевичем, С.М. Никольским и другими в области конструктивной теории функций комплексного и действительного переменного. Является автором более 80 научных трудов, посвященных различным проблемам современной теории функций комплексного и действительного переменного. Первая его работа «О полноте некоторых систем аналитических функций» («ИАН СССР, серия матем.», 1939, № 5 и 6) привела автора к замечательной теореме о единственности целой функции F(z) первого порядка конечного типа при задании значений последовательных производных F(n) (Ln) (n=0,1,2,...). Эта публикация произвела фурор в советской и мировой математике. Научным руководителем молодого аспиранта И.И. Ибрагимова стал легендарный советский математик А.О. Гельфонд. Эта встреча положила начало многолетнему и плодотворному сотрудничеству двух талантливых ученых. А тогда, в 1939 году, на Ученом совете механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова И.И. Ибрагимов первым среди азербайджанцев был удостоен звания кандидата физико-математических наук.

Но главным для ученого были не ордена и звания, а достижения на научном фронте. Исследования полноты систем последовательных производных аналитической функции и полноты систем функций, порождаемых аналитическими функциями, привели Ибрагима Ибрагимова к ряду важных результатов. Полученные им результаты о полноте системы функций составили содержание его доклада на международной конференции по конструктивной теории функций в г. Будапеште летом 1969 г. Данные о полноте обеих последних систем функций легли в основу его сообщения, тезисы которого были опубликованы в материалах международного конгресса математиков в г. Ницце (Франция) в сентябре 1970 года.

И.И. Ибрагимов совместно с М.В. Келдышем (математический сборник 20:2 (1947)) установили точные критерии сходимости интерполяционного ряда Ньютона во всем классе целых функций. Это исследование явилось отправным пунктом для ряда исследований Ибрагима Ибиш оглы и некоторых его учеников. К этому циклу его работ относятся исследование сходимости интерполяционного ряда Абеля – Гончарова, интерполяционного тригонометрического ряда Лагранжа, интерполяционного ряда рациональных функций и др.

Нельзя не отметить многолетний совместный труд И.И. Ибрагимова и А.О. Гельфонда. Совместными усилиями они решили проблему о двух точках методом теории интерполяции, что явилось важным вкладом в теорию функций и отправным пунктом многих исследований.

Работы И.И. Ибрагимова и некоторых его учеников, относящиеся к вышеуказанным трем циклам, составили основу его последней монографии «Методы интерполяции функций и некоторые их применения» (578 с.), опубликованной в конце 1971 года издательством «Наука» в г. Москва. Некоторые важные результаты, полученные И.И. Ибрагимовым, составили содержание его доклада на VI математическом съезде в г. Ленинграде в 1961 году (Труды съезда, т. 2 (1964)).

Результаты И.И. Ибрагимова и его учеников, относящиеся к последнему направлению конструктивной теории функций действительного переменного, были систематизированы в его монографии «Экстремальные свойства целых функций конечной степени» (изд. АН Азерб. СССР, 1962 г.). Эта работа явилась важным шагом на пути создания общей теории наилучшего приближения целых функций. Успешные исследования этого направления были продолжены в работах самого И.И. Ибрагимова и его учеников. К числу наиболее важных результатов можно отнести решение экстремальных задач для линейных операторов в классе целых функций конечной степени («ДАН СССР», 152:5 (1963)), изучение экстремальных свойств целых функций конечной степени из класса Боаса («ДАН СССР», 157:2(1964)), решение некоторых условно экстремальных» задач в классе целых функций конечной степени («ДАН СССР», 166:2 (1966), «Сибирск. Матем. ж.», №2 (1966)), неравенства для целых функций конечной степени в норме обобщенного класса Лебега («ДАН СССР», 20:4 (1964)). Результаты последней работы составили содержание доклада Ибрагима Ибиш оглы на Международном конгрессе математиков в 1962 году в г. Стокгольме (Швеция).

К другому циклу относятся работы И.И. Ибрагимова, посвященные вопросам приближения функций комплексного переменного в бесконечных областях посредством целых функций. Первый важный результат в этом направлении: о среднеквадратичном приближении функции комплексного переменного в бесконечных областях (УМН, 11:5 (1956)) был сообщен на Всесоюзной конференции по теории функции комплексного переменного в г. Москве в 1955 году. Эта работа была продолжена в статьях его учеников, а также в совместных исследованиях. Здесь были применены принципы типа Фрагмена–Линделефа к вопросам наилучшего приближения функции комплексного переменного посредством целых функций. О полученных результатах Ибрагим Ибиш оглы сообщил в докладе «Об экстремальных свойствах аналитических функций в полуплоскости» на Международном конгрессе математиков в 1966 году в Москве (Труды конгресса).

К числу важных результатов можно отнести также полученные И.И. Ибрагимовым совместно со своими учениками данные о наилучших квадратурных и кубатурных формулах, о приближении функций многих переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных, о построении линейно положительных операторов общего вида, приближающих непрерывную функцию на данном отрезке вещественной оси, и др.

Отдельно стоит выделить просветительскую работу Ибрагима Ибиш оглы на родной земле. Вернувшись в Баку после защиты докторской диссертации, он успешно сочетает научную деятельность с преподаванием в вузах и подготовкой кандидатов наук. Уже в 1950 году под его руководством была защищена первая кандидатская диссертация по теории функций. Всего же под руководством Ибрагима Ибиш оглы защищено свыше 50 кандидатских и докторских диссертаций. И.И. Ибрагимов воспитал много научных работников в области теории функций и теории приближения. Его ученики работали и работают во всех наших республиках и ряде зарубежных стран.

От всех своих учеников он требовал хорошего знания изучаемого вопроса, знакомства с отечественными и международными источниками, тщательно выполненной работы.

Анар Мамедханов (его внук): Он относился к своим ученикам как к собственным детям, а к своим детям иногда был более строг. Он был настоящим классическим ученым. Для него не существовало такого понятия, как «завтра» или «потом», если это касалось математики.

Неоценимы написанные академиком И.И. Ибрагимовым монографии по различным разделам теории функций («Методы интерполяции функций и некоторые их применения» (М.:, Главная редакция Физико-математической литературы, Издательство «Наука», 1971, 578 с.). Также им созданы ряд учебников для вузов и учебные пособия на азербайджанском языке: «Основы теории чисел» (Баку, Азернешр, 1956 г., 380с.), «Основы теории рядов» (Баку, Азернешр, 1957 г. 502 с.), «Математический анализ» (Баку, Азернешр, 1962 г., 870 с.). Эти книги сыграли важную роль в становлении национальных кадров в области математики и техники.

В сегодняшнем успехе азербайджанской математики огромная заслуга принадлежит выдающимся умам старшего поколения, которые своим талантом и интуицией определили направления и перспективы нашей науки, подготовили кадры и заложили основы научных контактов. Среди них – основоположник теории функций в Азербайджане, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки, академик Ибрагим Ибиш оглы Ибрагимов. Он всего добился сам, своим трудом, своим умом, необыкновенной работоспособностью. Научный мир уважал его, с ним считались, советовались.

В одной заметке невозможно даже просто перечислить все направления многогранной исследовательской деятельности академика И.И. Ибрагимова. В какой бы отрасли математики он ни работал, его труды давали сушественные результаты и ложились в основу многочисленных монографий отечественных и зарубежных авторов. Им была начата разработка ряда новых направлений совместно со своими учениками, которые и по сей день успешно продолжают самостоятельные исследования. Особую популярность ему принесли совместные работы с такими выдающимися математиками, как. А.О. Гельфонд, М.В. Келдыш, А. Лаврентьев, С.М. Никольский, а также статья академика С.Н.Бернштейна под названием «Добавление к одной работе И.И.Ибрагимова». В математической литературе широко известна знаменитая теорема Келдыша–Ибрагимова, послужившая отправным пунктом для многочисленных научных исследований. И.И. Ибрагимов являлся основоположником целой математической школы в Азербайджане, которая высоко оценена в мировой математике как наиболее интенсивно развивающаяся.

И.И. Ибрагимов совместно со своим учеником А.Д. Гаджиевым предложили новый метод построения последовательности линейно-положительных операторов в пространстве непрерывных функций, равномерно сходящихся на данном отрезке и являющихся обобщением известных операторов С.Н. Бернштейна, Бернштейна–Хлодовского и других. Изучены основные свойства построенных операторов, относящихся к сохранению выпуклости, вогнутости и полиномиальности генерирующей функции. Кроме того, ими сконструированы общие линейные интегральные операторы типа И.И.Привалова, строящиеся путем вычитания значений интеграла типа Коши – Стильтьеса внутри и вне данного контура, найдены порядки сходимости таких операторов. При этом оказалось, что применяемая методика исследования позволяет установить соответствующий результат и для общих сингулярных интегралов в комплексной области.

Ныне покойный академик А.Д. Гаджиев в своих воспоминаниях писал: «Он всё писал сам, от руки, своим аккуратным крупным почерком, затем сам же печатал на машинке и сам же вставлял формулы. Я и мои сверстники, ученики Ибрагим Ибишевича, более 30 лет проработавшие рядом с ним, всегда восхищались его работоспособностью. Казалось, что он не знает усталости. Я не помню ни одного случая, чтобы он отложил заседание своего семинара или не пришёл на семинар. Он приходил даже будучи нездоровым и как ни в чём не бывало вёл семинар».

Отметим, что И.И. Ибрагимовым совместно с учениками рассматривался еще ряд других вопросов современной теории функции, не связанных с упомянутыми проблемами. Например, для функций многих переменных из определенного класса разработана методика построения линейной комбинации функций меньшего числа переменных, наименее уклоняющейся от заданной функции (совместно с М.-Б.А. Бабаевым), которая докладывалась на международной конференции по теории аппроксимации в Польше (июнь 1974 г.) и опубликована в трудах конференции (на английском языке).

И.И. Ибрагимов является автором более 100 фундаментальных монографий и научных статей. Многие из них переведены на английский язык.

И.И. Ибрагимов обладал просто фантастическим даром интуиции и научного предвидения. И. И. Ибрагимов оказал очень большое влияние на воспитание математиков в Азербайджане. Огромны заслуги академика И.И. Ибрагимова в организации преподавания высшей математики в вузах Азербайджана. Свыше 50 лет он посвятил педагогической деятельности, работая на должностях ассистента, доцента, а с 1947 года – профессора почти во всех вузах республики. Ученый читал студентам и аспирантам лекции по общим и специальным курсам современного математического анализа: теориям аналитических функций, функций действительного переменного, целых функций, теории чисел, аппроксимации функций действительного и комплексного переменного, интерполяции функций и др.

Где бы он ни работал, И.И. Ибрагимов везде пользовался заслуженным уважением студентов и коллег. До сих пор в учебных заведениях ходят легенды о прочитанных им лекциях исключительной научной глубины, о его точных и ясных математических рассуждениях, строгом и справедливом отношении к окружающим. И.И. Ибрагимов был духовно и физически крепким человеком, никогда не жаловался на здоровье. Он начал сдавать только в последние годы жизни после кончины своей супруги.

Ибрагимов Ибрагим Ибиш оглы скончался 6 ноября 1994 года, оставив яркий след в истории математики Азербайджана.

И.И. Ибрагимов был большим патриотом своей страны, человеком сильного духа и твердой воли. Это был самодостаточный человек и в жизни, и в науке. Личностью, которой чужды были раздвоенность, неуверенность, чувство страха. Его отличали справедливость и принципиальность, безукоризненная честность, доброжелательность, готовность поддержать и прийти на помощь. Человек, влюблённый в математику и пронесший это чувство через всю свою жизнь. Можно было удивляться тому, с каким упоением он относился к математике. Это было настоящее эстетическое чувство, с ощущением математической красоты и гармонии, которое простым смертным неведомо. Преувеличить его роль в создании школы теории функций в Азербайджане невозможно. Его идеи продолжают жить и развиваться в трудах многочисленных учеников и последователей. Светлая память о прекрасном человеке, мудром педагоге, отзывчивом коллеге навсегда останется в сердцах всех, кто его знал. Он был не только ученым, но и разносторонне образованным человеком, оказывающим огромное положительное влияние на окружающих.

Он был полезен для других, следы его существования живут в сердцах многочисленных учеников, очень многих людей, кто имел счастье с ним вместе трудиться на ниве просвещения в математике, а также тех, кто прямо или косвенно пользовался помощью, поддержкой, работами И. И. Ибрагимова.

Его образ, память о нем, его идеи живут в сердцах и умах его учеников, в его книгах.

Литература:

1. Асланов Р.М. – И.И. Ибрагимов – создатель школы теории функций в Азербайджане. Международная научно-практическая конференция «XV Колмогоровские чтения», посвящённая памяти профессора М.И Зайкина, 10–13 сентября 2019 г., г. Арзамас, стр.162–168.
2. Асланов Р.М., Матросова Л.Н. Матросов В.Л. Предшественники современной математики. Историко-математические очерки в пяти томах, том 3. – М.:. Прометей, 2011, 528 с. (стр. 395–430)
3. Ибрагимов И.И. Жизнь, отданная науке (автор – составитель Саида Ибрагимова) Баку, Издательство «Элм» 2002. 328с.
4. Марданов М. Дж., Асланов Р.М. Предшественники современной математики Азербайджана. Историко-математические очерки. М.: Прометей 2016, 516 с. (стр. 91–108)

Об авторе:

Асланов Рамиз Муталлим оглы, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор, старший научный сотрудник, Институт математики и механики Национальной академии наук Азербайджана, г. Баку, Азербайджанская Республика, r_aslanov@list.ru

About the author:

Ramiz Mutallim oglu Aslanov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Senior Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Republic of Azerbaijan, r_aslanov@list.ru

УДК 378.14

Дробышева И.В., Дробышев Ю.А.

О направлениях интеграции информационной и математической составляющих в подготовке студентов

Универсальность математического знания, опосредованная широким спектром применения математического моделирования для исследования и преобразования процессов и явлений в различных сферах жизни и деятельности человека, привела к особому статусу математики как учебной дисциплины. Различные ее разделы изучаются студентами практически всех направлений подготовки. В силу высокого уровня абстрактности и строгости изложения овладение математическими дисциплинами вызывает объективные сложности, поэтому проблема поиска средств, снижающих их, является весьма актуальной. В работе рассмотрены направления интеграции математической и информационной составляющих подготовки студентов в целях повышения качества каждой из них.

Ключевые слова: математическая и информационная составляющие подготовки студентов; цифровые технологии, программное обеспечение, эффективность обучения математике

Irina V. Drobysheva, Yuri A. Drobyshev

About the Directions of Integration of Information and Mathematical Components in the Preparation of Students

The universality of mathematical knowledge, mediated by a wide range of applications of mathematical modeling for the study and transformation of processes and phenomena in various spheres of human life and activity, has led to a special status of mathematics as an academic discipline. Its various sections are studied by students of almost all areas of training. Due to the high level of abstractness and rigor of presentation, mastering mathematical disciplines causes objective difficulties, therefore the problem of finding means to reduce them is very relevant. The paper considers the directions of integration of mathematical and informational components of students' training in order to improve the quality of each of them.

Keywords: mathematical and informational components of students' training; digital technologies, software, efficiency of teaching mathematics

Образовательные программы практически по всем направлениям и профилям подготовки бакалавров/специалистов содержат курс математики. Очевидно, что его содержание, объем, уровень строгости определяются в первую очередь спецификой направления подготовки. В зависимости от этих факторов и предпочтений разработчиков образовательных программ это может быть как единый курс математики, охватывающий достаточно большое число разделов, так и совокупность отдельных математических дисциплин. Важной особенностью математического блока образовательных программ является наличие тесных внутрипредметных связей, лежащих в основе не только последовательности изучаемых дисциплин, но и отдельных разделов и тем.

Включение той или иной математической дисциплины в образовательную программу в первую очередь обусловлено возможностями использования ее аппарата как для решения проблем из будущей профессиональной деятельности, так и профессионально-ориентированных задач, включенных в дисциплины направления и профиля подготовки. Очевидно, что данный фактор является определяющим для установления содержания и объема математической подготовки.

Еще одно, но не менее значимое основание при определении содержания математической подготовки студентов связано с широким спектром ее возможностей для формирования интеллектуального потенциала выпускника вуза, что в свою очередь обеспечивает решение проблемы формирования человеческого потенциала общества.

В тоже время необходимо отметить, что в последние годы имеет место тенденция снижения уровня овладения математическими дисциплинами. К сожалению, на экзаменах отметку «удовлетворительно» получают более 50% студентов. Если соотнести этот результат с уровнями овладения содержанием и формируемыми при этом компетенциями, то преобладающим является так называемый пороговый, характеризуемый знаниями основных понятий, фрагментарными умениями по их применению. Это означает, что задача подготовки студентов к будущей профессиональной деятельности в части формирования способности строить и исследовать математические модели практически остается нерешенной. Имеем замкнутый круг: математику включают в программу, чтобы использовать ее аппарат в профессиональной деятельности, и получают в качестве результата обучения выпускников не способных это делать на должном уровне.

Причинами создавшейся ситуации является достаточно большое число объективных противоречий, которые имеют место при обучении математике в вузе. Рассмотрим основные из них.

Первое состоит в том, что для успешного восприятия и усвоения математических дисциплин в вузе необходимо владение основными понятиями и методами школьной математики. Однако у значительной части первокурсников этого не наблюдается. Подтверждением этого факта являются результаты не только ЕГЭ, но и входного контроля их знаний и умений.

Высокий уровень абстрактности и строгости изложения материала требуют от студентов умений сосредоточиться и воспринимать выстраиваемые преподавателем и представленные в учебнике логические рассуждения, чему мешает преобладание не только наглядно-образного типов восприятия и мышления, но и клипового восприятия и мышления, характерного современной молодежи. Второй стороной этого же явления является отсутствие необходимой визуализации в учебниках и учебно-методических материалах.

Требование овладения математическим содержанием на уровне, обеспечивающем применение знаний и умений для анализа ситуаций из сферы профессиональной деятельности, построения и исследования математических моделей, с одной стороны, ограниченный объем времени, предусмотренный на его достижение, и наличие широкого спектра индивидуально-психологических особенностей студентов, влияющих на успешность изучения математического содержания, с другой стороны, это еще одно противоречие, лежащее в основе низкого уровня овладения математическими дисциплинами.

Высокая доля самостоятельной работы, которая определяется Федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования, и отсутствие у студентов умений самостоятельно работать с математическими источниками, предполагающих не только прочтение того или иного учебного содержания, но и его осознание и применение для решения задач, это еще одна причина, обуславливающая низкий уровень овладения вузовским курсом математики.

В качестве иллюстрации значимости этих причин достаточно обратиться к обучению математическому анализу. Он представляет тот раздел математической подготовки, содержание которого характеризуется высоким уровнем абстрактности и строгости изложения. В тоже время изложение материала в учебниках крайне слабо визуализировано. Электронные учебники повторяют печатные. Решение значительного числа не только профессионально-ориентированных, но и математических задач является процессом творческим, требующим поиска метода решения, а не применения алгоритма в стандартной ситуации.

Перечисленные факторы говорят об актуальности проблемы поиска средств, обеспечивающих разрешение указанных выше противоречий.

В данной работе раскрыты возможности нивелирования отдельных из указанных выше противоречий за счет использования в процессе обучения математике возможностей, открываемых дисциплинами информационной составляющей подготовки.

Термин «цифровизация» в настоящее время является одним из наиболее используемых. Процесс цифровизации охватывает все сферы жизни и деятельности человека: экономическую, социальную, духовную, политическую. Он, с одной стороны, упрощает и ускоряет решение широкого спектра задач, в том числе «нерешаемых» ранее, а с другой стороны, предъявляет требования к подготовке каждого из нас к использованию современных информационных систем, программного обеспечения. Подготовка студентов также должна быть ориентирована на овладение ими современным программным обеспечением на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности.

В тоже время зачастую сам образовательный процесс является инертным по отношению к использованию преимуществ цифровых технологий для повышения его качества. По отношению к ряду дисциплин парадокс состоит в том, что их изучение происходит без пересечения с информационными курсами, которые могли бы повысить эффективность достижения требуемых результатов обучения. В полной мере это зачастую относится к изучению студентами нематематических направлений и профилей подготовки математических и информационных дисциплин, взаимосвязи между которыми практически отсутствуют. Анализ учебных планов вузов и рабочих программ дисциплин позволил выявить две тенденции.

В соответствии с первой процесс овладения математическими и информационными курсами во временном плане проходит параллельно, но практически без содержательного пересечения. Вторая тенденция взаимосвязи математических и информационных курсов состоит в том, что изучение математических дисциплин предшествует изучению информационных. Это означает, что студенты во время обучения математике не приобретают опыт применения современного программного обеспечения для исследования математических моделей.

Теоретический анализ содержания математических и информационных курсов, опыт использования современного программного обеспечения в процессе обучения студентов математике позволили обосновать и раскрыть идею интеграция информационной и математической составляющих в подготовке студентов.

Реализация этой идеи осуществляется посредством интегрированных лабораторных работ, выполнение которых преследует две группы целей. Первая группа, условно называемая информационной, ориентирована на приобретение студентами опыта использования программного обеспечения (языка R, MS Excel) для решения разнообразных задач. Вторая группа целей – математическая – на использование возможностей программных продуктов для повышения качества обучения математике, в частности, математическому анализу. В содержании каждой лабораторной работы объективно выделены две части, выполнение каждой из которых направлено на реализацию целей указанных групп.

Анализ курса математики, традиционно изучаемого студентами нематематических направлений подготовки, и возможностей программного обеспечения (MS EXCEL, R) позволил выявить основные направления использования последнего для повышения эффективности обучения математике. Они явились основанием для определения содержания лабораторных работ.

Первое направление связано с проведением студентами исследовательских работ, направленных на открытие свойств математических объектов за счет вычислительного эксперимента, визуализации информации, изменения параметров объектов. Это направление приобретает особую значимость при решении профессионально-ориентированных задач, требующих поиска условий для оптимизации величин, связанных с выбором стратегии, зависящей от ряда показателей и т.д. Например, использование вычислительного эксперимента, условия возрастания функции, понятий функции прибыли, издержек обеспечивают решение задачи «Некоторая фирма может производить продукцию, используя различные технологии и ресурсы. Определить условия, при которых функция прибыли от реализации всей выпущенной продукции будет возрастающей, если функция издержек $C(x)=-\alpha x^3+3x^2+2\beta x+132$, α – параметр, связанный с выбором оптимальной технологии, β – параметр, зависящий от используемых ресурсов, x (ед.) – объем продукции. В зависимости от выбранной технологии и оборудования параметр α принимает значения 1,5; 1,6;... 5. Параметр β принимает значения 0,1; 0,2; 0,3 0,4. Цена единицы продукции $p(x)=\alpha x+\beta$ *(ден.ед.)*».

Второе направление, связанное с использованием возможностей программных продуктов при изучении учебного материала высокого уровня абстрактности, позволяет студентам открыть и осознать содержание изучаемых понятий. Так, одним из наиболее сложных для восприятия понятий курса математического анализа является понятие предела функции в точке. Использование возможностей MS EXCEL позволяет студентам без интеллектуальных затруднений находить значения функции и строить ее график на любом промежутке. Исходя из анализа значений функции в серии окрестностей заданной точки x_0 разных радиусов, студенты имеют возможность сделать вывод о динамике значений зависимой и независимой переменных. Проведенный анализ обеспечивает осознанное восприятие определения предела функции в точке, позволяет открыть типы точек разрыва.

Третье направление использования программного обеспечения при изучении математики связано с составлением кодов, выполнение которых обеспечивает реализацию численных методов математики для решения задач, в отношении которых применение точных методов невозможно или неэффективно в плане временных затрат, физических усилий. Как правило, если в программу математической подготовки не включена дисциплина (раздел) «Численные методы», то рассмотрение вопросов, связанных с использованием приближенных методов решения в курсе математики проходит в ознакомительном плане. Лабораторные работы, посвященные этим методам, с одной стороны реализуют информационную цель по приобретению опыта составления кодов на тех языках программирования, которые изучают студенты, что способствует уровню повышения их информационной грамотности, а с другой стороны, математическую цель по приобретению опыта использования приближенных методов. Например, студентам предлагается, используя возможности MS EXCEL и численных методов, найти экстремумы функции $f(x)=x^4-3x^3-11x^2+3x+10$, исследовать ее на монотонность и построить график.

Для получения представления о графике функции $y=f(x)$ надо составить таблицу значений функции на произвольно выбранном промежутке с заданным шагом и построить график (рис.1).

$$f(x)=x^4-3x^3-11x^2+3x+10$$

x	f(x)
-7	2880
-6	1540
-5	720
-4	270
-3	64
-2	0
-1	0
0	10
1	0
2	-36
3	-80
4	-90
5	0
6	280
7	864

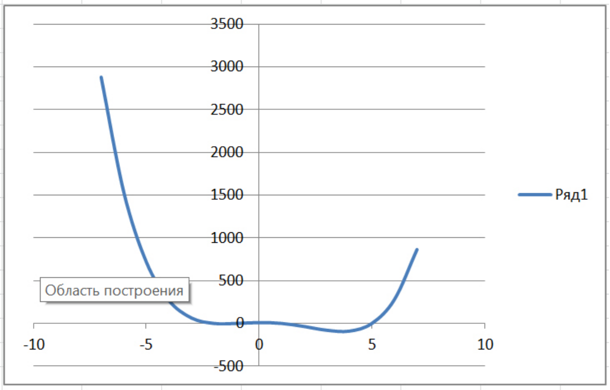

Рисунок 1 – Таблица значений и график функции y=f(x)

Анализ значений функции и ее графика позволяет сделать вывод, что отрезок [-7;7], которому принадлежат значения переменной x, дает представление о графике функции, и изменять его не требуется.

Для нахождения критических точек определяют производную функции и вычисляют ее значения на заданном отрезке. Анализ значений производной позволяет выбрать отрезки [-2;-1], [0;1], [3;4], которым принадлежат значения x_1,x_2,x_3, в которых производная принимает значения равные нулю; для каждого отрезка определить конец, который будет начальным приближением x_0 к искомому значению независимой переменной (рис. 2).

Для определения критических точек используется метод касательных. Его реализация с точностью до 10^{-3} представлена на рис 3.

Для того, чтобы найти экстремумы функции, установить их вид и определить интервалы монотонности функции, надо дополнить таблицу значений функции и производной найденными значениями x_1, x_2, x_3 (рис.4).

На основе анализа таблицы формулируется вывод:

$y_{min}(-1{,}567)\approx-4{,}139$, $y_{max}(0{,}130)\approx10{,}198$, $y_{min}(3{,}687)\approx-92{,}040$;

при $x\epsilon(-\infty;\,-1{,}567)\cup(0{,}130;\,3{,}687)$ функция убывает, при $x\epsilon(-1{,}567;\,0{,}130)\cup(3{,}687;\,-\infty)$ функция возрастает.

Четвертое направление использования программного обеспечения при изучении математики, являясь логическим продолжением третьего, обеспечивает решение профессионально-ориентированных задач. Использование ПО позволяет решать задачи с данными, максимально приближенными к реальным. Кроме того, становится возможным конструировать задачи, строить математические модели и исследовать их на основе реальных данных, получаемых студентами при анализе статистических сайтов, сайтов предприятий.

$f(x)=x^4-3x^3-11x^2+3x+10$

x	f(x)	g(x)=f'(x)
-7	2880	-1656
-6	1540	-1053
-5	720	-612
-4	270	-309
-3	64	-120
-2	0	-21
-1	0	12
0	10	3
1	0	-24
2	-36	-45
3	-80	-36
4	-90	27
5	0	168
6	280	411
7	864	780

x	g(x)=f'(x)	g''(x)
-2	-21	-66
-1	12	-42
0	3	-18
1	-24	6
3	-36	54
4	27	78

Рисунок 2 – Таблица значений производной. Отбор значений переменной x для начала поиска критических точек методом касательной

n	x_n	g(x)	g'(x)	g(x)/g'(x)	|g(x)/g'(x)|
1	-2	-21	62	-0,3387097	0,3387097
2	-1,6612903	-3,6305	41,0219	-0,0885008	0,0885008
3	-1,5727895	-0,2239	35,9942	-0,0062194	0,0062194
4	-1,5665701	-0,0011	35,648	-3,022E-05	3,022E-05

n	x_n	g(x)	g'(x)	g(x)/g'(x)	|g(x)/g'(x)|
1	0	3	-22	-0,1364	0,136364
2	0,1363636	-0,1572	-24,231	0,00649	0,006488
3	0,1298757	-0,0003	-24,135	1,3E-05	1,29E-05
4	0,1298628	-1E-09	-24,135	5,1E-11	5,12E-11

n	x_n	g(x)	g'(x)	g(x)/g'(x)	|g(x)/g'(x)|
1	3	-36	32	-1,125	1,125
2	4,125	39,86719	107,9375	0,3693544	0,36935
3	3,7556456	5,323564	79,656868	0,0668312	0,06683
4	3,6888144	0,159899	74,889563	0,0021351	0,00214
5	3,6866793	0,000161	74,739023	2,151E-06	2,2E-06

$x_1\approx-1{,}567$; $x_2\approx0{,}130$; $x_3\approx3{,}687$ - критические точки.

Рисунок 3 – Определение критических точек

Таким образом, в рамках математической составляющей лабораторных работ этого направления составляются математические модели, а в рамках информационного – реализация моделей средствами программных продуктов. В качестве примера можно привести задачу, в которой студентам предлагается исследовать функцию прибыли $f(x)=e^{0,7x}-3x^3-2x^2+3x+1$, построить ее график и определить, при каких значениях объема x продукции производственный процесс эффективен. По мере изучения содержания математических курсов изменяются формулировки заданий. Они приобретают черты исследовательской работы.

В заключение необходимо отметить, что реализация выделенных и представленных выше направлений интеграции математической и информационной составляющих подготовки студентов стала возможна за счет введения в содержание подготовки студентов первого курса Финуниверситета, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.01 Экономика и 30.03.02 «Менеджмент», дисциплин «Компьютерный практикум» и «Цифровая математика в R и Excel». Они ориентированы на приобретение студентами не только знаний о возможностях указанных видов программного обеспечения, но и умений по их использованию для решения математических и профессионально-

$f(x)=x^4-3x^3-11x^2+3x+10$

x	f(x)	g(x)=f'(x)
-7	2880	-1656
-6	1540	-1053
-5	720	-612
-4	270	-309
-3	64	-120
-2	0	-21
-1,567	-4,1387	-0,016406
-1	0	12
0	10	3
0,13	10,1978	-0,003312
1	0	-24
2	-36	-45
3	-80	-36
3,687	-94,04	0,0241338
4	-90	27
5	0	168
6	280	411
7	864	780

Рисунок 4 – Уточненная таблица значений функции и производной функции ориентированных задач. В работе [2] даны описания лабораторных работ по компьютерному практикуму, в результате выполнения которых студенты приобретают опыт исследования функций, используя возможности MS Excel. На основе выполнения заданий лабораторной работы 3 может быть реализовано второе направление интеграции математической и информационных составляющих подготовки студентов; лабораторной работы 8 – третье направление. В работе [1] представлены возможности по использованию вычислительных методов для исследования математических моделей.

Литература:

1. Дробышева И.В., Дробышев Ю.А. Компьютерный практикум как средство формирования у студентов умений по использованию вычислительных методов для исследования математических моделей//Информатизация образования и методика электронного обучения. Материалы II Международной научной конференции. Красноярск, 2018. – С. 89-91-142с.
2. Дробышева И.В., Дробышев Ю.А. Компьютерный практикум. Учебное пособие к лабораторным работам. – Калуга: ИП Стрельцов И.А. (Издательство «Эйдос»), 2020 . – 142с.

Об авторах:

Дробышева Ирина Васильевна, профессор, доктор педагогических наук, заведующий кафедрой, кафедра «Бизнес-информатика и высшая математика» Калужский филиал ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», г. Калуга, Россия

Дробышев Юрий Александрович, профессор, доктор педагогических наук, Калужский филиал ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», г. Калуга, Россия

About the authors:

Irina V. Drobysheva, Professor, Doctor of Pedagogical Sciences, Head of the Department, Department of Business Informatics and Higher Mathematics Kaluga Branch of the Federal State Educational Institution of Higher Education "Financial University under the Government of the Russian Federation", Kaluga, Russia

Yuri A. Drobyshev, Professor, Doctor of Pedagogical Sciences, Kaluga Branch of the Financial University under the Government of the Russian Federation, Kaluga, Russia

УДК 378.147-057.875:51 Ермаков В.Г.

Антикризисные элементы в системе подготовки учителя математики

Кризис мировой системы образования и хаотизация современного мира наиболее заметно проявляются в снижении устойчивости образовательных процессов. Её поддержание должно стать постоянной заботой педагога. Поэтому у системы подготовки будущего учителя появляется сверхзадача – вооружить учителя средствами предотвращения или разрешения кризисных ситуаций. В статье проанализированы некоторые аспекты такой подготовки.

Ключевые слова: математическое образование, подготовка учителя, устойчивость образовательного процесса

Vladimir G. Ermakov

Anti-Crisis Elements in the System of Mathematics Teacher Training

We see that the crisis of the global education system and the chaos in the modern world reduce stability of educational processes. The constant care of the teacher is to maintain this stability. Therefore, the most important task of the training system of the future teacher is to provide the teacher with the means that will help prevent or resolve crises. The article analyzes some aspects of such training.

Keywords: mathematical education, teacher training, stability of educational process

Снижение устойчивости образовательного процесса происходит по многим причинам, среди них на первое место по значимости нужно поставить обострение главного противоречия – противоречия между ограниченным исходным потенциалом человека и стремительным ростом «предметного тела» цивилизации. В последнее время к этому добавилось мощное деструктивное давление на систему образования социально-культурных факторов, включая описанный С.П. Капицей демографический переход, завершение периода экономических отношений, основанных на ссудном капитале, небывалое обострение экологических проблем. Механизмы влияния этих изменений на разные стороны жизни людей и на систему образования, а также методологические аспекты введения понятия устойчивости образовательных процессов описаны в статье [5]. Для математического образования особую значимость имеют также проблемы, связанные с усложнением структуры математического знания, с широким применением аксиоматического метода и использованием понятий высокого уровня абстрактности. Эти обстоятельства вместе со всё более острым дефицитом учебного времени сильно уменьшают возможности развития умственных сил и математических способностей учащихся, а без этого главного и остродефицитного ресурса у системы математического образования и образования в целом остаётся мало шансов на поступательное развитие.

Общий рост деструктивного давления на образовательные процессы со стороны множества разных факторов делает эти процессы для учащегося крайне напряжёнными и сильно ветвящимися. Достаточно сказать, что из-за одного только снижения мыслительной способности учащихся индивидуальные образовательные траектории могут переходить в негативный сценарий развития по самым незначительным причинам – вследствие пропуска необходимых разъяснений в учебнике, недостаточной пропедевтики какого-либо понятия, общего снижения учебной активности учащихся и т.п. В силу неустранимого противоречия между личностью и культурой эта опасность была присуща образовательным процессам всегда, но некоторое время назад ещё оставалась надежда на недопущение кризисных явлений дидактическими средствами.

Так, например, глава 5 в книге Ю.К. Бабанского [2] целиком посвящена описанию системы мер, направленных на предупреждение неуспеваемости школьников. При этом автор отметил, что «когда говорят об оптимальности, то обязательно подчёркивают, что речь идёт о максимально возможных результатах не вообще, а именно в данных, конкретных условиях школы, определённого класса» [2, с. 6]. Фактически это положение требует серьёзной трансформации образовательной сферы, так как подразумевает использование более сложных моделей управления образовательными процессами. Без этого нельзя учесть «весь круг возможностей, которыми располагают в данном случае школьники и педагоги». Резерв здесь заключается в том, чтобы не тратить усилия на то, что уже неплохо сформировано, и, напротив, направить больше сил и времени на узкие места в подготовке учащихся в конкретном классе. Эта теоретическая инновационная идея обеспечивать интегрально понимаемую оптимизацию процесса обучения за счёт локализации рассмотрений – в рамках класса или школы особенно актуальна для нашего времени, так как способствует большей индивидуализации обучения.

В книге указаны и барьеры, мешающие педагогу отказываться от действий по рекомендованному шаблону в пользу работы на основе теории оптимизации. В первую очередь это большая трудоёмкость такой работы, хотя, как отмечает автор, «затруднение при выборе окупается облегчением всей последующей деятельности, ведёт к повышению её результативности и в конечном счете экономит время и усилия педагога» [2, с. 247]. Признавая, что в книге сделаны лишь первые шаги к обоснованию теории оптимизации, Ю.К. Бабанский отмечает также, что «овладение идеями оптимального построения процесса обучения (...) связано не только с научно-методической, но прежде всего с методологической подготовкой ученых-педагогов и учителей» [2, с. 248]. Упоминается и общая нацеленность на развитие творческой индивидуальности учителя, его таланта как составляющих элементов искусства педагогической деятельности.

Легко видеть, что в настоящее время ситуация в области образования многократно усложнилась, и теперь главную для теории Ю.К. Бабанского задачу предупреждения школьной неуспешности нужно менять на иную структурообразующую задачу, а именно на разработку корректирующих мероприятий, призванных устранять последствия уже произошедших кризисных обострений учебной ситуации. В этом случае из наследия Бабанского непременно нужно взять положение о необходимости использовать более сложные модели управления и идею локализации. В чём-то исследовательская ситуация даже упростилась. Суть дела в том, что в случае реального обострения беспредельная многоаспектность образовательного процесса ослабевает благодаря выходу на первый план небольшого числа резко усилившихся факторов. В них педагогу легче сориентироваться и выстроить адресное антикризисное противодействие.

Теоретическая поддержка этой деятельности педагога затруднена разнообразием кризисных проявлений и обилием их причин. Но, во-первых, даже отработка отдельных корректирующих мероприятий может исправить положение дел во многих аналогичных случаях, что позволяет развивать антикризисную теорию шаг за шагом. Во-вторых, если рассматривать математику как глобальную имитационную модель деятельности, направленной на освоение сложных объектов и процессов, то некоторое косвенное основание для оптимистического прогноза в данном случае можно найти в теории катастроф. При всём огромном разнообразии таких явлений математикам удалось показать, что их истинное разнообразие всё-таки невелико. Например, в градиентных динамических системах, зависящих от трёх параметров, «число топологически различных бифуркаций оказалось конечным» [1, с. 6]. В то же время В.И. Арнольд отметил: «Теория Пуанкаре-Андронова потери устойчивости состояний равновесия имеет так много приложений (...), что нет никакой возможности их здесь перечислить: механические, физические, химические, биологические и экономические системы теряют устойчивость на каждом шагу» [1, с. 27]. Разумеется, прямой перенос этих наблюдений в область образования был бы неправомерным, но заметим, из-за названного выше центрального противоречия современности учащийся заведомо является самым слабым элементом в системе образовательных отношений и в этом смысле данная система тоже является градиентной.

Приступая к анализу методологических и методических аспектов построения корректирующего обучения, отметим, что всё более угнетённое положение учащегося помогает понять, что любые антикризисные мероприятия так или иначе должны быть связаны с активной поддержкой развития учащегося, в том числе, непосредственно в процессе обучения. Разумеется, эта задача не является новой, но все средства, выработанные для её решения на протяжении многих столетий, должны теперь использоваться с максимальной настойчивостью и тщательностью. Под наибольшей угрозой утраты находится логическое основание математических теорий, которое способствовало развитию математики и обучению математике 25 столетий начиная с Древней Греции. Актуальность сохранения этого достояния для современного образования обоснована в статье [4]. Но на этом пути появились новые трудности. Так, длина доказательств отдельных утверждений продолжает расти и часто выходит за пределы человеческих возможностей. Например, доказательство Грандиозной теоремы алгебры – о том, что найдены все простые конечные группы, занимает 15 тысяч страниц в журналах, а 300 часов машинного времени, потраченного на доказательство теоремы о четырёх красках, делает его повторение человеком и вовсе недостижимым. С формальной точки зрения эту проблему ослабил аксиоматический метод построения математических теорий, характерной чертой которого является отсечение начальных этапов формирования базовых понятий, но из-за такого «сокращения» теории перед начинающими изучать данную теорию сразу встают почти непреодолимые препятствия.

Для уменьшения негативных последствий от этих изменений в математике при проектировании корректирующих мероприятий нужно сделать два важных акцента. Во-первых, часть педагогических усилий, нужно направить на тренировки учащихся в доказательстве отдельных взаимосвязанных цепей утверждений. Повышенные требования к строгости доказательств помогут им прояснить роль логического фундамента математики и открыть для себя возможность сжатия материала на этой основе. Такая стратегия изучения математики, согласующаяся с антиэнтропийной направленностью человеческого интеллекта, вполне может стать привлекательной для учащихся и тем самым дать существенный толчок их активности в данном направлении и, как следствие, развитию их самодеятельности. Для того чтобы выставленные требования не были проигнорированы и реально привели к искомому каскаду перестроек в личностном плане, данные мероприятия должны быть подкреплены специальными формами и методами текущего контроля. Пример такого рода приведён в статье [6].

Во-вторых, начальные понятия современных аксиоматических теорий в математике уже очень далеко ушли от сформулированного Аристотелем идеала и не могут считаться самоочевидными истинами, не требующими доказательств, теперь они практически неотвратимо «останавливают мысль». Отсюда следует, что помощь учащемуся в этом месте со стороны педагога принципиально необходима, несмотря даже на то, что из-за сжатия в этой точке огромного массива сведений и жёстких ограничений по времени оказать её крайне трудно. Следует отметить, что начала аксиоматических теорий – всего лишь наиболее яркие представители обширного семейства понятий высокого уровня абстрактности, поэтому есть все основания считать, что разработка активных методов осуществления пропедевтики таких понятий окажет существенное влияние на теорию и практику всего современного образования. Более детальное обоснование этого тезиса представлено в работе [7]. Решение столь сложной задачи в течение малого промежутка времени было бы невозможно без решительного стимулирования активности самого учащегося, которая должна привести к ускорению учебного процесса и к восполнению времени, затраченного на корректирующее мероприятие. Здесь тоже решающую роль играют новации в системе текущего контроля, в свою очередь, они в данном случае позволяют увидеть важные динамические особенности развития процесса. Движение вверх по вынужденно короткой пропедевтической лестнице, состоящей из отдельных опорных утверждений, как правило, происходит с ускорением, которое подпитывается накоплением учащимися опыта детального анализа и осмысления материала. На этом фоне отчётливо видно, что основные проблемы и главные прорывные моменты в реализации программы пропедевтики сосредоточены на первой ступени упомянутой лестницы. Это даёт основание говорить не только о развивающем обучении в целом, ориентированном, как правило, на построение развивающей среды, но и о его локальных и даже микролокальных аспектах, охарактеризованных в работе [8].

Как уже было сказано, разработка этих аспектов важна и для развития учащегося, и для развития системы образования, но так как решение данной задачи коррекции, максимально трудной в содержательном отношении, существенно зависит от не менее трудного стимулирования личностных изменений, то речь нужно вести об отыскании комплексных психолого-педагогических решений. Они, в свою очередь, требуют реального, а не декларативного взаимодействия специалистов из разных предметных областей, имеющих отношение к сфере образования. Без такого рода объединительных усилий общая тенденция к ослаблению межпредметного взаимодействия при подготовке учителя, порождаемая всё более глубокой дифференциацией науки и образования, оставит будущего учителя без арсенала средств, которые остро необходимы для проведения всё более актуальных интенсивных корректирующих мероприятий. Пользуясь терминологией из смежных областей науки, отметим, что найденные точки особой концентрации проблем вполне могут послужить естественными аттракторами (притягивателями) межпредметных взаимодействий при подготовке будущего учителя-предметника. Этим нужно воспользоваться.

Не менее действенным средством педагогической коррекции образовательного процесса и восстановления его устойчивости является использование задач. Функции и методы их применения в учебном процессе исследованы очень глубоко и разносторонне. В зависимости от уровня сформированной самодеятельности учащихся можно говорить о двух различных стратегиях. Так, если названный уровень достаточно высок, то при помощи хорошо подобранной последовательности задач можно выстраивать, например, программу пропедевтики исходных понятий аксиоматической теории. Ценность этого подхода очевидна и заключается в такой опоре на собственную активность учащихся, при которой она ещё и возрастает! И тогда реализуется противоречивое положение А. Дистервега о том, что «самодеятельность – средство и одновременно результат образования» [3, с. 118]. С формальной точки зрения противоречие выражается в том, что результатом должно стать средство его достижения. На самом деле речь идёт об экономном расходовании очень важного, но остродефицитного ресурса образовательного процесса. Накопление опыта решения задач в процессе их решения хорошо укладывается в эту схему. Конкретный пример и методика использования системы задач для пропедевтики понятий общей топологии описаны в статье [9].

Если уровень развития мыслительной способности и самодеятельности учащихся является низким, то в целях корректирующего обучения можно использовать отдельные задачи – при условии, что их решение будет обустроено специальным образом. Прежде всего, нужно снять обычные жёсткие ограничения на время поиска решения и отставить в сторону журнал регистрации отметок. Для мотивирования и запуска мыслительной деятельности предлагаемая задача должна быть в чём-то привлекательной и при этом достаточно далеко выходить за границу опыта, имеющегося у учащихся. Такой уровень трудности задания обеспечивает самый короткий путь к цели, ибо, как отметил А.Ш. Тхостов, «сознание проявляет себя лишь в столкновении с иным, получая от него «возражение» в попытке его «поглотить»» [13, с. 4]. Дополнительное обоснование этого выбора можно получить из соображений, представленных в статье [11]. В ней автор упомянул созданную А.С. Подколзиным компьютерную программу, которая решает конкурсные задачи по алгебре и тригонометрии, и отметил совпадение протоколов решения задач у машины и у среднего абитуриента. Этот результат подтвердил неплохое качество программы, но по отношению к абитуриентам вскрыл удивительный момент: они не могли действовать по алгоритму А.С. Подколзина, так как в программе для одной алгебры пятьсот приёмов. Следовательно, «минимально способный абитуриент в некоторой, пусть небольшой, степени – Гаусс, он учится изобретать приёмы, а не применять их» [12, с. 94]. Далее А.Н. Кричевец заметил, что сложившаяся ориентация подготовки к вступительным экзаменам на «усвоение приёмов» вытеснило развитие «гауссовой» сообразительности и теперь, «справляясь с конкурсными экзаменами, абитуриенты оказываются тем не менее не способны к математической деятельности» [12, с. 95]. Поэтому и нужно в критической ситуации использовать задачи, приёмы решения которых учащимся заранее не известны.

В таком использовании задач для стимулирования развития мыслительной способности есть немало тонкостей, которые заслуживают обстоятельного анализа, но двигаться в этом направлении стоит потому, что резервы, открывающиеся на этом пути, весьма значительны. В статье [10] детально описан пример использования всего трёх нестандартных задач на трёх уроках в середине второго класса для проведения глубокой педагогической коррекции учебной ситуации, позитивные последствия от которой сказывались с нарастанием вплоть до окончания начальной школы. По словам учителя, эти дети изменили в лучшую сторону стиль своих сочинений и стали меньше уставать.

При всех отличиях приведённые варианты осуществления коррекции имеют общее свойство – их можно применять на небольших отрезках времени и на малом объёме материала. Благодаря этому антикризисные элементы локального действия несложно встраивать в любую сложившуюся систему подготовки учителя. Важно отметить, что даже один элемент такого рода, специально подобранный для разрешения конкретной кризисной ситуации, в большинстве случаев позволяет получить серьёзный позитивный многоплановый сдвиг: вследствие пережитого успеха уровень самооценки и активности повышается как у учащиеся, так и у педагога, порождая каскад дальнейших сдвигов.

Главная трудность в такой специализированной подготовке будущего учителя состоит в том, чтобы научить его выбирать наиболее подходящее средство для той или иной кризисной ситуации. Как было показано выше, аналогичная проблема возникает и при реализации теории оптимизации Ю.К. Бабанского. В рассматриваемом нами случае многое упрощается благодаря тому, что кризисная ситуация во многом сама подсказывает оптимальную последовательность шагов. Кроме того, ставку можно делать не на передачу полного набора готовых рецептов корректирующих мероприятий с привязкой к конкретным кризисным ситуациям, а на опыт собственного переживания студентами наиболее явных проблем в процессе их собственного обучения в вузе – при условии их разрешения на основе квалифицированной помощи со стороны педагога, действующего в соответствии с указанными принципами. Так, если поставить высокие цели в обучении студентов в трудных математических курсах, то без пропедевтики сложных понятий не обойтись, а её качественная проработка, как указано, например, в статьях [6] и [9], поможет студенту увидеть главный источник своего успеха в усвоении курса и новые возможности в дальнейшей учебе.

В поддержку курса методики преподавания математики (МПМ) в Гомельском государственном университете имени Ф. Скорины для первокурсников был введён курс «Избранные вопросы элементарной математики» с небольшим числом учебных часов. Стратегия использования отведённого времени заключалась в предъявлении нескольких цепей взаимосвязанных фактов школьной математики, предназначенных для усвоения студентами на максимальном уровне качества при полном контроле со стороны педагога в каждом элементе. Одну из цепей составили теоремы из так называемой абсолютной геометрии в изложении А.П. Киселёва [11]. Но основная цель такого подхода – не в содержании, а в достижении эффектов личностного плана, указанных выше.

В курсе МПМ наряду с быстрым повторением этих же сведений в целях корректирующего обучения нами использовался небольшой набор нестандартных задач. Системное изучение задач такого рода обычно организуют в спецкурсах, в данном случае речь идёт именно о разрозненных задачах, которые в силу своей изолированности требуют высокой концентрации умственных сил. Даже при решении этих задач с некоторой помощью преподавателя кругозор студентов расширяется, они обретают опыт напряжённого поиска решения, кроме того, с каждой такой задачей соединяются гроздья методических средств и приёмов, использованных при её решении.

Будучи нацеленными на развитие умственных сил учащегося указанные средства осуществления педагогической коррекции могут применяться в большинстве кризисных ситуаций, возникающих в современных образовательных процессах. В свою очередь, каждый успех учителя в разрешении такой ситуации даёт дополнительный импульс его дальнейшему инновационному поиску. Импульс к развитию получит и педагогическая теория, так как при взаимодействии педагога и учащегося в рамках этих мероприятий будет накапливаться опыт обеспечения динамической устойчивости образовательного процесса на основе обратных связей в конкретном классе. Из-за беспредельной многоаспектности образовательных процессов теорию трудно довести до такого уровня детализации.

Включение антикризисных элементов в систему подготовки учителя может стать катализатором перехода от системы развивающего обучения, в которой учитель подтягивает учеников к своему уровню, к системе развивающегося образования, в которой учащийся, педагог и педагогическая система в целом будут развиваться в тесной взаимосвязи друг с другом.

Литература:

1. Арнольд В. И. Теория катастроф. 3-е изд., доп. М.: Наука, 1990. 128 с.
2. Бабанский Ю.К. Оптимизация процесса обучения (Общедидактический аспект). М., Педагогика, 1977. 256 с.
3. Дистервег А. Избранные педагогические сочинения. М., Учпедгиз, 1956. 375 с.
4. Ермаков В.Г. История математики и современное математическое образование // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2014. № 2 (83). С. 67–72.
5. Ермаков В.Г. Методологические и социально-культурные аспекты обеспечения устойчивости образовательных процессов // Педагогическая наука и образование. 2017. № 4 (21). С. 3–11.
6. Ермаков В.Г. Формирование самодеятельности студентов средствами контроля // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2018. № 2 (107). С. 18–23.
7. Ермаков В.Г. Топология информационного пространства культуры и проблема устойчивости образовательных процессов // Вестник Казахстанско-Американского Свободного Университета. Научный журнал. 1 выпуск: педагогика и психология. Усть-Каменогорск, 2019. С. 24–33.
8. Ермаков В.Г. Микролокальные аспекты развивающего обучения как основа межпредметного взаимодействия при подготовке учителя // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2021. № 2 (125). С. 18-24.
9. Ермаков В.Г. Функции и структура задач при локальном обращении аксиоматических теорий // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2012. № 2 (72). С. 45-52.

10. Ермаков В.Г. Методологическая основа модернизации и операционализации теории Л.С. Выготского о зонах развития // Педагогика и психология: проблемы развития мышления. Развитие личности в изменяющихся условиях: материалы V Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием (15 мая 2020 г.) / под общ. ред. Т.Н. Ищенко. Красноярск: СибГУ им. М.Ф. Решетнёва, 2020. С. 34–46.
11. Киселев А.П. Геометрия. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 328 с.
12. Кричевец А.Н. Возможно ли естественно-научное исследование оснований развития? // Психическое развитие в онтогенезе: закономерности и возможности периодизации: материалы международной психологической конф. М.: Вера Медика, 2000. С. 90–95.
13. Тхостов А.Ш. Топология субъекта (опыт феноменологического исследования) // Вестник Московского Университета. Сер. 14. Психология. 1994. № 2. С. 3–13.

Об авторе:

Ермаков Владимир Григорьевич, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Беларусь

About the author:

Vladimir G. Ermakov, Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, the Associate Professor, Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus

УДК 372.85; 378.14

Тестов В.А.

Решение математических задач – основа формирования разных видов мышления в цифровую эпоху

В статье раскрывается значение деятельности по решению задач при изучении математики как основы формирования разных видов мышления у обучающихся. Система задач является основным средством формирования творческого опыта, а также содержанием поисковой деятельности. К числу новых направлений в обучении математике относится теория обратных и некорректных задач, которые имеют ярко выраженную практическую направленность.

Ключевые слова: цифровизация образования, проблема понимания, решение задач, категория задач

Vladimir A. Testov

The Solution of Mathematical Tasks as a Basis For the Formation of Different Types of Thinking in the Digital Age

The article reveals the importance of problem solving activities in the study of mathematics as the basis for the formation of different types of thinking among students. The task system is the main means of forming creative experience, as well as the content of search activity. Among the new directions in teaching mathematics is the theory of inverse and incorrect problems, which have a pronounced practical orientation.

Keywords: digitalization of education, the problem of understanding, problem solving, category of tasks

В современных условиях, когда происходит цифровизация всех сторон жизни общества, главной задачей системы образования является подготовка выпускников, обладающих необходимыми компетенциями и готовыми менять свой профиль профессиональной деятельности по мере необходимости. В обучении на первый план выдвигается развитие личности. Огромную роль в достижении этой цели и, прежде всего, развитии интеллектуальных способностей личности во все времена играет математика. Изучение математики существенно обогащает теоретическое мышление, формирует такие качества мышления, которые характерны не только для математической деятельности, но и являются необходимыми человеку для полноценной жизни в обществе.

Роль математики в образовании и науке была велика во все времена. В цифровую эру она еще более возросла и стала многоплановой. В силу креативности методов, которые человек использует при изучении математики и формировании способностей к ее применению, эта область научного знания является приоритетной для формирования компетенций цифрового общества.

В настоящее время преобладающей тенденцией в науке становится более глубокий, чем междисциплинарный, синтез знания, выводящий его на новый, более высокий трансдисциплинарный уровень познания. Математика легла в основу формирования трансдисциплинарных систем знаний таких, как теория информации, искусственный интеллект, Big Data и др., которые отличает принципиальное игнорирование междисциплинарных границ. Математика стала лидером трансдисциплинарного тренда в образовании, синтезатором идей и методов огромного научного потенциала различных дисциплин.

В последние десятилетия происходит интенсивный процесс цифровой трансформации всей системы образования. Благодаря цифровым технологиям удалось в значительной степени предотвратить в условиях пандемии коллапс системы образования. Однако, результаты исследований института возрастной физиологии РАО показывают, что у многих из обучающихся обострились проблемы с пониманием изучаемого материала. Хотя цифровые технологии способствуют решению целого ряда методических задач, они не являются панацеей. Это всего лишь средство обучения, а, как и любое средство обучения, оно носит вспомогательный характер, это помощник учителя, и его применение должно определяться содержанием изучаемого материала. Особенно эффективно применение компьютеров при изучении такого материала, который допускает наглядную интерпретацию на экране.

Особенностью математики, как учебного предмета, всегда являлась ведущая роль задач. На всех этапах учебной деятельности по математике система задач является основным средством формирования творческого опыта, овладения структурой и содержанием поисковой деятельности.

Роль использования задач в обучении математики варьировалась в зависимости от конкретно-исторических условий. Можно выделить три основных подхода к использованию задач в обучении математике.

1. Изучение математики с целью обучения решению задач. Особенности этого подхода хорошо прослеживаются в «Арифметике» Л.Ф. Магницкого.
2. Обучение математике, сопровождаемое решением задач. Большинство современных учебников следует особенностям именно этого подхода.
3. Обучение математике через решение задач. Характерные особенности этого подхода хорошо проявляются при чтении известной книги Г. Пойя и Г. Сеге «Задачи и теоремы из анализа».

Выбор каждого из этих трех подходов определяется целями обучения, образовательными концепциями и готовностью преподавателя и учащихся.

О развитии логического мышления с помощью математики давно писали многие ученые. Позднее были введены понятия о таких видах мышления, как алгоритмическое, комбинаторное, функциональное, наглядно-геометрическое (визуальное) и способы их развития при обучении математике. В работах [1, 2] показано, что эти виды мышления имеют большое значение не только для обучения математике, но и для математического творчества. Все эти виды мышления целенаправленно развиваются при решении задач определенного вида.

Типы таких задач известны достаточно давно: логические, на планирование действий (составление алгоритмов), образно-геометрические, комбинаторные, арифметические и т.д. В частности, было установлено, что развитие логического мышления и повышение логической культуры школьников лучше всего достигается через решение логических задач с привлечением минимального дополнительного материала (кругов Эйлера, графов и т.п.), а не через изучение формальной или математической логики. Развитие комбинаторного мышления достигается также посредством решения задач определенного "комбинаторного" типа с привлечением минимального теоретического материала. А развитие алгоритмического мышления лучше всего достигается путем решения задач типа известной старинной русской задачи про переправу через реку волка, козы и капусты. Для развития наглядно-образного мышления большое внимание следует уделять наблюдению, проведению опытов (в том числе с применением компьютеров), решению задач на разрезание и конструирование фигур, на различные наглядные построения и т.д.

Важным является использование исследовательских задач, порождающих проблемные ситуации, для разрешения которых обучающимся требуется экспериментирование с динамическими моделями математических объектов. Некоторыми авторами делались попытки отдельно выделять так называемые «компетентностные» задачи, но при внимательном рассмотрении оказалось, что каждая задача является «компетентностной», т.е. ее решение способствует овладению той или иной компетенцией.

К числу новых направлений относится и теория обратных и некорректных задач. В школьных программах и учебниках стало больше внимания уделяться обратным задачам и задачам с недостающими или избыточными данными. Такие задачи относятся к некорректным, их раньше всячески избегали в школьной, да и в вузовской математике. Эти задачи имеют ярко выраженную практическую направленность, поскольку в практической деятельности часто возникает необходимость принятия решений в условиях избытка, недостатка данных или их противоречивости. Каждая инженерная задача представляет собой пример некорректной задачи ввиду того, что условий дано в избытке, а среди данных могут присутствовать и противоречивые.

В последнее время интенсивно развиваются методы исследования обратных задач в экономике. Не единственность решения таких задач не противоречит действительности, а характеризует с различных сторон многообразную картину описываемых явлений.

Задачи являются объектом изучения математики не только в школе, но и в вузах, а также целого ряда других наук. Относясь к общенаучным понятиям, категория задачи выявляет свою значимость во многих междисциплинарных исследованиях. Процесс решения задач является моделированием проблемной ситуации, в которую попадает субъект в процессе своей деятельности.

Таким образом, решение математических задач является основой формирования наиболее плодотворного способа теоретического мышления, креативного потенциала личности, нелинейного мышления, которые являются важнейшими составляющими компетенций специалиста в цифровую эпоху.

Пронизывая все основные компоненты методической системы обучения математике, задачи придают этой системе многие интегративные качества, обеспечивающие целостность и преемственность учебного процесса. Эффективность обучения математике, в конечном счете, определяется тем, какие именно задачи и в какой последовательности предлагались учащимся, какими способами они решались и как велика была доля активности, самостоятельности ученика в процессе их решения.

Таким образом, при разработке стандартов, школьных и вузовских образовательных программ совершенно необходимо учитывать роль математики и решения задач в образовании. В последнее время большая доля учебного времени в вузах отводится изучению новых мелких дисциплин, а фундаментальные дисциплины (математика, физика и др.) оказались урезанными. Необходимо вернуть фундаментальным дисциплинам подобающее им место в вузовских образовательных программах.

Литература:

1. Тестов, В. А. Математическая одаренность и ее развитие //Перспективы науки и образования: международный электронный научно-практический журнал: http://pnojournal.wordpress.com, №6, 2014. – С. 60-67.
2 Тестов, В.А. Использование потенциала математических задач для развития мышления учащихся // Развивающий потенциал математического образования: школа – вуз: коллективная монография / Соликамский государственный педагогический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «ПГНИУ»; – Соликамск: СГПИ, 2015. – С. 28-39.

Об авторе:

Тестов Владимир Афанасьевич, профессор, доктор педагогических наук, Вологодский государственный университет, Вологда, Россия

About the author:

Vladimir A. Testov, Professor, Doctor of Pedagogical Sciences, Vologda State University, Vologda, Russia

СЕКЦИЯ 1. АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.968:519:6

Ермолаева Л.Б.

О решении некоторых интегро-дифференциальных уравнений

В работе приводится вычислительная схема решения задачи Коши для некоторого интегродифференциального уравнения. Дано теоретическое обоснование методов коллокаций, осциллирующих функций и механических квадратур. Установлены сходимость и оценки погрешности методов.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение первого порядка, скорость сходимости, оценки погрешности

Leila B. Ermolaeva

On the Solution of Some Integrodifferential Equations

The paper presents a computational scheme for solving the Cauchy problem for some integrodifferential equations. The theoretical substantiation of the methods of collocations, oscillating functions and mechanical quadratures is given. Convergence and error estimates of the methods are established.

Keywords: integrodifferential equation of the first order, convergence rate, error estimates

Решение множества прикладных задач (например, задач теории крыла и теории струй, задачи плоского нестационарного течения жидкости и др.) приводит к необходимости решения задачи Коши следующего вида

$$x^m(\mathrm{t}) + \int_{-1}^{1} h(t,s)x^{(m+1)}(s)ds = y(t) \qquad (1)$$

$$x^i(-1) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \qquad (2)$$

где $m \in N$ – произвольно фиксировано, $h(t,s), y(t)$ – известные функции, а функция $x(t)$ – искомая.

В общем случае задача Коши (1)-(2) относится к некорректно поставленным задачам, но в отдельных случаях при удачном подборе пары пространств искомых элементов и правых частей уравнение (1) удается сделать корректным (см., напр., в [1,2]). Будем рассматривать частный случай задачи (1)-(2), когда интегродифференциальное уравнение конечного порядка вида (1) приводится к интегродифференциальному уравнению первого порядка следующего вида

$$Kx \equiv x(\mathrm{t}) + \int_{-1}^{1} \mathrm{h(t,s)x'(s)ds} = \mathrm{y(t)}. \qquad (3)$$

Удачный подбор пары пространств превращает некорректно поставленную задачу (1)-(2) в корректно поставленную по Адамару, то есть: а) задача (1)-(2) разрешима; б) решение единственно; в)это решение непрерывно зависит от исходных данных. При решении данной задачи использованы результаты из общей теории приближенных методов, функционального анализа, а также из теории приближений.

Приведено теоретическое обоснование различных методов решения задачи Коши (1) - (2) в паре пространств Соболева $X = Y = W^1_{2,\rho}[-1;1]$ с весом Чебышева второго рода. Построены схемы конкретных проекционных методов, а именно, метода коллокаций, метода осциллирующих функций (метода подобластей), а также метода механических квадратур (см. [5]).

Приведено обоснование указанных методов при решении уравнения (3) в пространстве $W^1_{2,\rho}[-1;1]$. Установлены эффективные оценки погрешности, которые учитывают гладкость исходных данных.

Пусть $X = Y = W^1_{2,\rho}[-1;1] \equiv W^1_{2,\rho}$ - пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[-1;1]$ функций, первые производные которых квадратично суммируемы на $[-1;1]$с весом $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$.

Представим уравнение (3) в операторном виде:

$$Kx \equiv x + Hx = y \ (x\epsilon X, y\epsilon Y), \qquad (4)$$

где $(Hx)(t) = \int_{-1}^{1} h(t,s)x'(s)ds.$

Если оператор $H: X \to X$ - вполне непрерывный оператор, то уравнение (4) является уравнением второго рода с вполне непрерывным оператором. Тогда для него справедлива известная альтернатива Фредгольма, то есть, либо исходное неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части, либо соответствующее ему однородное уравнение имеет ненулевое решение. Оператор $H: X \to X$ будет обладать этим свойством в том случае, когда ядро $h\epsilon W^1_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}$, где $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$.

Рассмотрим схему общего полиномиального проекционного метода. Пусть $X_n = Y_n = H_n \subset \mathrm{X}$ - подпространство алгебраических полиномов, имеющих степень не выше $n \in N$. Приближенное решение уравнения (3) станем искать в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(t),\ -1 \le t \le 1, \tag{5}$$

где $T_k(t) = \cos(k\, arccost)$ - многочлен Чебышева первого рода на отрезке $[-1;1]$. Неизвестные коэффициенты $\{c_k(t)\}_0^n$ системы (5) будем находить из условия, что $x_n(t)$ является точным решением операторного уравнения

$K_n x_n \equiv P_n K x_n = P_n y\ (x_n \epsilon X_n, P_n y \epsilon Y_n)$, (6)

где $P_n: X \to X_n$ – некоторый линейный оператор. В случае выполнения условия $P_n^2 = P_n$, уравнение (6) примет следующий вид

$$K_n x_n \equiv x_n + P_n K x_n = P_n y\ (x_n \epsilon X_n), \tag{7}$$

Уравнения (6), (7) равносильны системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (n+1)-го порядка относительно неизвестных коэффициентов $\{c_k\}_0^n$ приближенного решения уравнения (5). В случае выбора определенного полиномиального оператора P_n получается СЛАУ конкретного полиномиального проекционного метода.

Для вычислительной схемы (3), (5), (6) справедлива

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) $y(t) \epsilon W_{2,\rho}^1,\ \rho(t) = \sqrt{1-t^2}$; 2) ядро $h \epsilon W_{2,\rho}^1 \times L_{2,1/\rho}$; 3) уравнение (3) имеет единственное решение при любой правой части из $W_{2,\rho}^1$; 4) оператор P_n удовлетворяет условию $P_n^2 = P_n$, причем, операторы $P_n: Y \to Y_n$ ограничены по норме равномерно относительно некоторого $n \in N$.

Тогда начиная с некоторого натурального *n*, уравнение (6) имеет единственное решение, существует обратный оператор $K_n^{-1}: Y_n \to X_n$, причем для него выполняется равенство $\|K_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} = O(1), n \to \infty$. При этом приближенные решения $x_n^* = K_n^{-1} P_n y$ сходятся к точному решению x^* уравнения (3) в пространстве $W_{2,\rho}^1[-1;1]$ со скоростью, заданной следующими соотношениями:

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_{2,\rho}^1} = O\left\{E_n(x^*)_{W_{2,\rho}^1}\right\} = \left\{E_n\left(x^{*\prime}\right)_{2,\rho}\right\},$$

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_{2,\rho}^1} = O\left\{E_n(y')_{2,\rho} + E_n^t(h_t')_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}}\right\}.$$

Перейдем к рассмотрению конкретных проекционных методов решения уравнения (3) при разных способах задания оператора $P_n: X \to X_n$.

1. Введем на отрезке $[-1;1]$ систему узлов Чебышева

$$t_k = cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, k = \overrightarrow{0,n}.$$

Приближенное решение уравнения (3) будем искать в виде (5), а неизвестные коэффициенты $\{c_k\}_0^n$ будем находить из условий

$(Kx_n - y)(t_j) = 0,\ \mathrm{j} = \overrightarrow{0,n}$.

Эти условия эквивалентны СЛАУ вида

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \alpha_{kj} = y_j,\ \ j = \overrightarrow{0,n}, \tag{8}$$

где значения α_{kj} и y_j находят по формулам

$$\alpha_{kj} = T_k(t_j) + k\int_{-1}^{1} h(t,s) U_{k-1}(s) ds, \tag{9}$$

$$y_j = y(t_j). \tag{10}$$

Рассмотрим в качестве полиномиального оператора P_n оператор Лагранжа L_n, ставящий в соответствие функции $x(t) \in C[-1;1]$ алгебраический интерполяционный полином Лагранжа по системе узлов $t_k = cos\dfrac{2k+1}{2n+2}\pi, k = \overrightarrow{0,n}$:

$$(L_n x)(t) \equiv L_n(x;t) = \frac{c_{0,n}(x)}{2} + \sum_{k=0}^{n} c_{k,n}(x) T_k(t), \tag{11}$$

где $c_{k,n}(x) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} x(t_j) T_k(t_j)$, $\left(k = \overrightarrow{0,n}\right)$ – коэффициенты Фурье – Чебышева – Лагранжа непрерывной на $[-1;1]$ функции $x(t)$.

Если $P_n = L_n$, то СЛАУ (8), (9), (10) эквивалентна операторному уравнению (6).

Для оператора Лагранжа справедлива оценка $\|L_n\|_{X \to X} \le \frac{\pi}{2}$. Значит, оператор Лагранжа $L_n: X \to X_n$ ограничен по норме равномерно относительно $n \in N$. Кроме того, для любой функции $x(t) \in W_{2,\rho}^1 \equiv X$ интерполяционные многочлены Лагранжа сходятся в пространстве *X,* причем для любых натуральных n справедливы следующие оценки (см. [3,4]):

$$E_n(x)_X \le \|x - L_n x\|_X \le a(n) E_n(x)_X, \tag{12}$$

$$E_{n-1}(x')_{2,\rho} \le \|x - L_n x\|_X \le b(n) E_{n-1}(x')_{2,\rho}, \tag{13}$$

где

$$a(n) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{2\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2}} \le \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}, \tag{14}$$

$$b(n) = \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2}} \le \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\sqrt{3}}. \tag{15}$$

В данном случае вышеприведенный метод коллокаций для интегродифференциального уравнения (3) представляет собой частный случай общего полиномиального проекционного метода (5) - (6) при $P_n = L_n$, удовлетворяющем условиям (12) - (15). В таком случае сходимость данного метода следует из вышеприведенной теоремы.

2. Введем на отрезке $[-1;1]$ систему узлов

$$t_k = cos\frac{2k-1}{2n}\pi, k = \overrightarrow{1,n}.$$

Зададим оператор метода подобластей Π_n:

$$\Pi_n x = DL_n X, (Dx)(t) \equiv x'(t), \qquad X(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau.$$

Приближенное решение уравнения (3) будем искать в виде алгебраического полинома (5).

Неизвестные коэффициенты $\{c_k\}_0^n$ определим из условий

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}[(Kx_n)(t) - y(t)]\,dt = 0,\ j = \overline{0,n}. \qquad (16)$$

Эти условия эквивалентны СЛАУ вида (8), где значения α_{kj} и y_j находят по формулам

$$\alpha_{kj} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} T_k\,(t)dt + k\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{-1}^{1} h(t,s)\,U_{k-1}\,(s)dsdt, \qquad (17)$$

$$y_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} y\,(t)dt. \qquad (18)$$

При $P_n = \Pi_n$ СЛАУ (16), (17), (18) эквивалентна операторному уравнению (6).

Сходимость метода подобластей следует из вышеприведенной теоремы.

3. Введем на отрезке $[-1;1]$ систему узлов Чебышева первого рода

$$t_k = cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, k = \overrightarrow{0,n}.$$

Приближенное решение уравнения (3) будем искать в виде алгебраического полинома (5). Для нахождения неизвестных коэффициентов $\{c_k\}_0^n$ заменим интеграл в (3) квадратурной суммой Эрмита-Чебышева:

$$\int_{-1}^{1}\frac{h(t,s)\sqrt{1-s^2}}{\sqrt{1-s^2}}x'(s)ds \approx \frac{\pi}{n+1}\sum_{l=0}^{n} h(t,t_l)\sqrt{1-t_l^2}x'(t_l).$$

Получим приближенное равенство

$$x(t) + \frac{\pi}{n+1}\sum_{l=0}^{n} h(t,t_l)\sqrt{1-t_l^2}x'(t_l) \approx y(t).$$

Подставим приближенное решение (3) вместо $x(t)$ и будем требовать равенства в узлах $\{t_j\}_0^n$ левой и правой частей. Тогда

$$x_n(t_j) + \frac{\pi}{n+1}\sum_{l=0}^{n} h(t_j,t_l)\sqrt{1-t_l^2}x_n'(t_l) = y(t_j),\ j = \overline{0,n}.$$

Эти условия задают СЛАУ вида (8) относительно неизвестных коэффициентов $\{c_k\}_0^n$, где

$$\alpha_{kj} = T_k(t_j) + \frac{k\pi}{n+1}\sum_{l=0}^{n} h(t_j,t_l)\sqrt{1-t_l^2}U_{k-1}(t_l), \qquad (19)$$

$y_j = y(t_j)$. (20)

Теорема 2. Пусть выполняются условия:

1) $y(t)\epsilon W_{2,\rho}^1$, $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$; 2) ядро $h\epsilon W_{2,\rho}^1 \times L_{2,1/\rho}$; 3) однородное уравнение, соответствующее уравнению (3), имеет лишь тривиальное решение.

Тогда СЛАУ метода механических квадратур (8), (19), (20) имеет единственное решение, приближенные решения (5) сходятся к точному решению x^* уравнения (3) в пространстве $W_{2,\rho}^1[-1;1]$ со скоростью, заданной любым из следующих соотношений:

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_{2,\rho}^1} = O\left\{E_n^t(h)_{W_{2,\rho}^1} + E_n^s(\bar{h})_{W_{2,\rho}^1} + E_n(y)_{W_{2,\rho}^1}\right\},$$

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_{2,\rho}^1} = O\left\{E_n(y')_{2,\rho} + E_n^s(\bar{h})_{W_{2,\rho}^1} + E_{n-1}(y')_{2,\rho}\right\},$$

где $\bar{h}(t,s) = h(t,s)\sqrt{1-s^2}$.

Литература:

1. Агачев Ю.Р. Сходимость полиномиального проекционного метода решения некорректных интегродифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 8. – С. 3–15.
2. Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
3. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. Интерполяционные полиномы Лагранжа в пространствах Соболева // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 7–19.
4. Габдулхаев Б.Г. Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 232 с.
5. Ермолаева Л.Б. Частный случай задачи Коши // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-32: материалы Междунар. конф. – Санкт-Петербург, 2019, Т.8.

Об авторе:

Ермолаева Лейла Билсуровна, доцент, кандидат физико-математических наук, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань, Россия

About the author:

Leila B. Ermolaeva, Associate Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia

УДК 517.95

Хайруллин Р.С.

Об одной задаче для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с сильным вырождением

Методом интегральных уравнений изучается краевая задача для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу при сильном его вырождении в характеристическом квадрате с данными на двух параллельных характеристиках. На особой линии определяются условия склеивания. Выделяются случаи безусловной разрешимости задачи и ее разрешимости при выполнении определенного числа дополнительных условий.

Ключевые слова: уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, сильное вырождение, метод интегральных уравнений

Ravil S. Khairullin

About One Problem for the Equation Euler-Poisson-Darboux With Strong Degeneracy

The boundary value problem for the Euler-Poisson-Darboux equation with its strong degeneracy in the characteristic square with data on two parallel characteristics is studied by the method of integral equations. The bonding conditions are determined on a special line. The cases of unconditional solvability of the problem and its solvability when a certain number of additional conditions are met are highlighted.

Keywords: Euler-Poisson-Darboux equation, strong degeneracy, method of integral equations

Рассмотрим уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u_{xy} - \frac{\alpha}{x-y} u_x + \frac{\beta}{x-y} u_y = 0 \qquad (1)$$

в области Ω, ограниченной характеристиками $AB: x=0,\ BC: y=1,\ AD: y=0,\ CD: x=1.$

В работе [2] рассмотрена задача Δ_2 нахождения решения уравнения (1) в области Ω по заданным значениям на двух параллельных характеристиках. При этом на параметры уравнения накладываются ограничения: $\alpha>0, \beta>0,\ \alpha+\beta<1.$

В настоящей работе мы исследуем эту задачу для уравнения (1) в случае $-1<\alpha+n=\alpha_0<0,\ \beta=-k.$ Здесь k и n - целые неотрицательные числа.

Обозначим $\Omega_1 = \Omega \bigcap \{x<y\},\ \Omega_2 = \Omega \bigcap \{x>y\}.$

Задача Δ_2. В области Ω найти непрерывную функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $u(x,y)$ имеет необходимые непрерывные производные и удовлетворяет уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$;

2) существуют пределы из областей $\Omega_i, i=1,2,$

$$\upsilon_i(x)=\lim_{y\to x}|x-y|^{\alpha+\beta}\,[u_x-u_y-B^{\alpha,\beta}(x,y;\tau)],\qquad 0<x<1, \tag{2}$$

и на особой линии AC выполняется условие склеивания

$$\upsilon_1(x)=(-1)^{n+k}\upsilon_2(x),\qquad 0<x<1; \tag{3}$$

3) удовлетворяет краевым условиям $u(0,y)=\varphi(y),\qquad 0\le y\le 1,$ (4)

$$u(1,y)=\psi(y),\qquad 0\le y\le 1. \tag{5}$$

Здесь $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ – заданные функции, удовлетворяющие следующему условию.

Условие 1. Функции $\varphi(y)$ и $\psi(1-y)$ принадлежат множеству $C[0,1]\bigcap C^m[0,1)\bigcap C^{m+1}(0,1),\ m=\max\{k,n\}$. Производные $\varphi^{(m+1)}(y),\psi^{(m+1)}(1-y)$ могут иметь особенности при $y=0$ порядка ниже единицы, если $k>n,$ и ниже $1+\alpha_0,$ если $k\le n;$ кроме этого, в последнем случае они должны удовлетворять условию Гельдера с показателем $\lambda>-\alpha_0$. При $y=1$ они могут иметь особенности порядка ниже $k+1,$ если $\alpha\ge\beta,$ и ниже $1+\alpha_0+k,$ если $\alpha<\beta.$

Функционал $B^{\alpha,\beta}(x,y;\tau)$ имеет вид $B^{\alpha,\beta}(x,y;\tau)=A_x^{\alpha,\beta}(x,y;\tau)-A_y^{\alpha,\beta}(x,y;\tau),$

где $A^{\alpha,\beta}(x,y;\tau)=\sum_{s=0}^{k}\frac{\tau^{(s)}(y)(-k)_s}{s!(\alpha-k)_s}(x-y)^s.$

Здесь $(a)_0=1,(a)_s=a(a+1)...(a+s-1),\ \tau(x)$ – обозначение:

$$\tau(x)=u(x,x),\ \ 0\le x\le 1. \tag{6}$$

Решение задачи будем искать в классе функций, для которых выполняется

Условие 2. Функция $\tau(x)$ принадлежит $C^m[0,1]\bigcap C^{k+n+1,\lambda}(0,1),\ \lambda>-\alpha_0$. Производная $\tau^{(m)}(x)$ может иметь особенности при $x=0$ и $x=1$ порядка ниже $1+\alpha_0,$ если $k\le n,$ и ниже единицы, если $k>n.$ Функция $\upsilon_i(x)$ принадлежит $C(0,1)$ может иметь особенности при $x=0$ и $x=1$ порядка ниже $\min\{1-\alpha,1-\beta\}.$

Задачу будем решать методом интегральных уравнений. Поэтому нам понадобятся основные соотношения между τ и υ из подобластей. Для их вывода используем представление решения задачи Коши для уравнения (1) с видоизмененными начальными условиями (6), (2). На основании результатов работы [5, с.129] получим, что решения этих в областях $\Omega_i, i=1,2,$ имеют вид

$$u(x,y)=\sum_{s=0}^{k}\frac{\tau^{(s)}(y)(-k)_s}{s!(\alpha-k)_s}(x-y)^s+$$

$$+(-1)^i\frac{\Gamma(1-\alpha+k)\,|x-y|^{\alpha+\beta}}{2\Gamma(1-\alpha)k!}\int_0^1\upsilon_i(\zeta)\sigma^{-\alpha}(1-\sigma)^{-\beta}d\sigma, \tag{7}$$

где $\zeta=y-\sigma(y-x).$

Из представления (7) с учетом краевых условий (4), (5) следуют искомые соотношения. Они имеют вид

$$\frac{\Gamma(1-\alpha+k)}{2k!}\upsilon_1(x)=\frac{(-1)^k}{(1-\alpha)_k}\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}}D_{0x}^{-1-\alpha_0}\tau^{(m+1)}(x)-x^{-k}D_{0x}^{-\alpha-m}\varphi^{(m+1)}(x), \tag{8}$$

$$\tau^{(s)}(0)=\varphi^{(s)}(0)(\alpha+\beta)_s/(\alpha)_s,\ \ s=\overline{0,m}, \tag{9}$$

$$\frac{(-1)^{k+n}\Gamma(1-\alpha+k)}{2k!}\upsilon_2(x)=-\frac{(-1)^k}{(1-\alpha)_k}\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}}D_{x1}^{-1-\alpha_0}\tau^{(m+1)}(x)-(-1)^{k+n+m}(1-x)^{-k}D_{x1}^{-\alpha-m}\psi^{(m+1)}(x), \tag{10}$$

$$\tau^{(s)}(1)=\psi^{(s)}(1)(\alpha+\beta)_s/(\alpha)_s,\ \ s=\overline{0,m}, \tag{11}$$

где $l=\min\{k,n\}$, D_{0x}^{γ} и D_{x1}^{γ} - операторы дробного интегрирования по Риману-Лиувиллю при $\gamma<0$ и дробного дифференцирования при $\gamma\geq 0$ (см. напр. [4]).

Используя соотношения (8), (10) и условия склеивания (3), получим уравнение относительно $\tau^{(m+1)}(x)$

$$\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}}\left[D_{0x}^{-1-\alpha_0}\tau^{(m+1)}(x)+D_{x1}^{-1-\alpha_0}\tau^{(m+1)}(x)\right]=f(x), \tag{12}$$

где

$$f(x)=(-1)^k(1-\alpha)_k x^{-k}D_{0x}^{-\alpha-m}\varphi^{(m+1)}(x)-(-1)^{n+m}(1-\alpha)_k(1-x)^{-k}D_{x1}^{-\alpha-m}\psi^{(m+1)}(x). \tag{13}$$

Уравнение (12) равносильно следующему уравнению

$$D_{0x}^{-1-\alpha_0}\tau^{(m+1)}(x)+D_{x1}^{-1-\alpha_0}\tau^{(m+1)}(x)=F(x)+\sum_{s=0}^{l}c_s x^s, \tag{14}$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная порядка $l+1$ функции $f(x)$, а c_s – произвольные постоянные.

Применим к равенству (14) оператор $D_{0x}^{\alpha_0+1}$ и с помощью формул композиции дробных производных и интегралов [4, с.16, 24] получим уравнение

$$\tau^{(m+1)}(x)\sin\frac{\pi\alpha_0}{2}-\frac{\cos(\pi\alpha_0/2)}{\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha_0+1}\frac{\tau^{(m+1)}(t)dt}{t-x}=F_1(x)+\sum_{s=0}^{l}c^1{}_s x^{s-1-\alpha_0}, \tag{15}$$

где $F_1(x)=D_{0x}^{\alpha_0+1}F(x)/2\sin\dfrac{\pi\alpha_0}{2}$, $c_s^1=c_s s!/2\Gamma(s-\alpha_0)\sin\dfrac{\pi\alpha_0}{2}$.

Из условия 1 и равенства (13) следует, что функция $f(x)$ может иметь особенности при $x=0$ и $x=1$ порядка ниже $\min\{1-\alpha,1-\beta\}$. Поэтому функция $F(x)$ может иметь особенности при $x=0$ и $x=1$ порядка ниже $-\alpha_0$, если $\alpha\geq\beta$, и должна быть ограниченной, если $\alpha<\beta$. Следовательно, функция $F_1(x)$ может иметь особенности при $x=0$ и $x=1$ порядка ниже единицы, если $\alpha\geq\beta$, и не выше $1+\alpha_0$ при $x=0$ и ниже $1+\alpha_0$ при $x=1$, если $\alpha<\beta$.

После замены $\mu(x)=\tau^{(m+1)}(x)x^{\alpha_0+1}$, $G(x)=F_1(x)x^{\alpha_0+1}$ уравнение (15) примет вид

$$\mu(x)\sin\frac{\pi\alpha_0}{2}-\frac{\cos(\pi\alpha_0/2)}{\pi}\int_0^1\frac{\mu(t)dt}{t-x}=G(x)+\sum_{s=0}^{l}c^1{}_s x^s. \tag{16}$$

Функция $G(x)$ может иметь особенности порядка ниже $-\alpha_0$ при $x=0$ и ниже единицы при $x=1$, если $\alpha\geq\beta$, и ниже $1+\alpha_0$ при $x=1$, а при $x=0$ должна быть ограниченной, если $\alpha<\beta$. Учитывая свойство 2, можно убедиться, что и у функции $\mu(x)$ допускаются такие же особенности. В этом классе у уравнения (16) существует единственное решение, и оно записывается по формуле решения, ограниченного при $x=0$ [3]. Это решение запишется так [6, с.15]:

$$\mu(x)=G(x)\sin\frac{\pi\alpha_0}{2}+\frac{\cos(\pi\alpha_0/2)}{\pi}\int_0^1\left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)}\right]^{\frac{1+\alpha_0}{2}}\frac{G(t)dt}{t-x}+$$

$$+\sum_{s=0}^{l}c_s^1\left\{x^s\sin\frac{\pi\alpha_0}{2}+\frac{\cos(\pi\alpha_0/2)}{\pi}\int_0^1\left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)}\right]^{\frac{1+\alpha_0}{2}}\frac{t^s dt}{t-x}\right\} \tag{17}$$

Вычислим выражение в фигурных скобках по индукции по s с использованием тождества [3, с. 489]

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{\lambda}(1-t)^{1-\lambda}(t-x)} = \frac{\pi\, ctg\pi\lambda}{x^{\lambda}(1-x)^{1-\lambda}}, \qquad 0<\lambda<1.$$

В результате равенство (17) примет вид

$$\tau^{(m+1)}(x) = F_1(x)\sin\frac{\pi\alpha_0}{2} + \frac{\cos(\pi\alpha_0/2)}{\pi}\int_0^1\left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{\frac{1+\alpha_0}{2}}\frac{F_1(t)dt}{t-x} + [x(1-x)]^{-\frac{1+\alpha_0}{2}}\sum_{p=0}^{l} c_p^2 x^p, \qquad (18)$$

где $c_p^2 = \frac{\cos(\pi\alpha_0/2)}{\pi(s-p)!}\sum_{s=p}^{l} c_s^1 \Gamma\left(\frac{\alpha_0+3}{2}\right)\Gamma\left(s-p-\frac{\alpha_0+1}{2}\right),\ p=\overline{0,l}.$

Матрица преобразования $\{c_s^1\}$ в $\{c_p^2\}$ – треугольная. Поэтому и c_p^2 являются произвольными независимыми постоянными.

Итак, для определения функции $\tau(x)$ мы получили двуточечную задачу (18), (9), (11) с произвольными постоянными в правой части уравнения. Для решения этой задачи используем следующее утверждение.

Лемма 1 [7,с.48]. Пусть задано дифференциальное уравнение

$$z^{(m+1)}(x) = f(x) + x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta-1}\sum_{p=0}^{l} a_p x^p,\ 0<x<1, \qquad (19)$$

где $\gamma>0, \delta>0,\ f(x)\in C(0,1)\cap L(0,1)$, а a_p – заранее не заданные постоянные, и краевые условия

$$z^{(s)}(0) = b_s^0,\ \ s=\overline{0,m}, \qquad (20)$$

$$z^{(s)}(1) = b_s^1,\ \ s=\overline{0,m}. \qquad (21)$$

Тогда существует единственное решение задачи (19)-(21) при любых правых частях, если $m=l$, и при выполнении $m-l$ условий разрешимости

$$\int_0^1 f(\sigma)G_s(\gamma+\delta-1,\gamma,\sigma)d\sigma + \sum_{p=0}^{s} b_{m-p}^0(-1)^p G_s^{(p)}(\gamma+\delta-1,\gamma,0) -$$

$$-\sum_{p=0}^{s} b_{m-p}^1(-1)^p G_s^{(p)}(\gamma+\delta-1,\gamma,1) = 0,\quad s=\overline{l+1,m},$$

если $m>l$. Здесь G_s – полиномы Якоби (см. напр.[1]). При этом все параметры a_p определяются однозначно, и функция $f(x)$ записывается в явном виде.

После нахождения функции $\tau(x)$ задача решается стандартным образом. В результате получим справедливость теоремы.

Теорема. Если функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ удовлетворяют условию 1, то задача Δ_2 в классе функций, удовлетворяющих условию 2, имеет единственное решение при $n=k$; в случае же $n\neq k$ для существования решения заданные функции должны дополнительно удовлетворять $|n-k|$ условиям интегрального характера.

Литература:

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979 г. – 830 с.
2. Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я. Краевые задачи для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу: Учебн. пособие / Куйбыш.гос.пед.ин-т. – Куйбышев, 1984. – 80 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – Изд. 3. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
4. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа: Учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с.
5. Хайруллин Р.С. Задача Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. – Казань: Казанский университет,

2014. – 276 с.
6. Хайруллин Р.С. Задача Трикоми для уравнения второго рода с сильным вырождением. – Казань: Казанский университет, 2015. – 236 с.
7. Хайруллин Р.С. Задача Трикоми для уравнения второго рода в неограниченных областях. – Казань: Казанский университет, 2016. – 196 с.

Об авторах:

Хайруллин Равиль Сагитович, профессор, доктор физико-математических наук, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань, Россия

About the authors:

Ravil S. Khairullin, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia

УДК 517.958

Харасова Л.С.

Новый метод решения краевых задач теории пологих оболочек с шарнирно опертыми краями в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко

В работе исследуется разрешимость одной системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка при заданных граничных условиях. В настоящее время имеется множество работ, посвященных выводу дифференциальных уравнений с частными производными в теории оболочек и численным методам их решения. Однако, при выводе дифференциальных уравнений с частными производными и граничных условий для них на первый план выходит проблема адекватности этих задач реальным процессам. В основе решения этой проблемы лежит строгое математическое исследование разрешимости краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Кроме того, наличие теорем существования позволяет легко доказать сходимость численных методов к точному реальному решению. Поэтому строгое исследование разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, доказательство теорем существования является весьма актуальной проблемой.

Ключевые слова: система нелинейных дифференциальных уравнений, интегральные представления, принцип сжатых отображений, теорема существования

Kharasova L.S.

A New Method for Solving Boundary Value Problems of the Theory of Flat Shells With Hinged Edges in the Framework of the S.P. Timoshenko Shear Model

The paper studies the solvability of one system of nonlinear second-order partial differential equations for given boundary conditions. Currently, there are many works devoted to the derivation of partial differential equations in shell theory and numerical methods for their solution. However, when they derive partial differential equations and boundary conditions for them, the problem of the adequacy of these problems to real processes comes to the fore. The solution to this problem is based on a rigorous mathematical study of boundary value problem solvability for nonlinear partial differential equations. Besides, the existence of theorems makes it easy to prove the convergence of numerical methods to an exact real solution. Therefore, a rigorous study of boundary value problem solvability for partial differential equations, the proof of theorem existence is a very urgent problem.

Keywords: system of nonlinear differential equations, integral representations, contracted mapping principle, existence theorem

В плоской ограниченной области Ω с границей Γ методом интегральных уравнений исследуется краевая задача А.

Задача А. Требуется найти решение системы

$$w_{1\alpha^1\alpha^1} + \mu_1 w_{1\alpha^2\alpha^2} + \mu_2 w_{2\alpha^1\alpha^2} = f_1,$$

$$\mu_1 w_{2\alpha^1\alpha^1} + w_{2\alpha^2\alpha^2} + \mu_2 w_{1\alpha^1\alpha^2} = f_2,$$

$$k^2\mu_1(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2} + \psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2}) + k_3 w_{1\alpha^1} + k_4 w_{2\alpha^2} - k_5 w_3 +$$

$$+\frac{1}{2}k_3 w_{3\alpha^1}^2 + \frac{1}{2}k_4 w_{3\alpha^2}^2 + \beta_2[(T^{\lambda\mu}w_{3\alpha^\lambda})_{\alpha^\mu} + R^3] = 0, \quad (1)$$

$$\psi_{1\alpha^1\alpha^1} + \mu_1\psi_{1\alpha^2\alpha^2} + \mu_2\psi_{2\alpha^1\alpha^2} = g_1 + k_0\psi_1,$$

$$\mu_1\psi_{2\alpha^1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2\alpha^2} + \mu_2\psi_{1\alpha^1\alpha^2} = g_2 + k_0\psi_2,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$w_1 = \psi_1 = 0, \quad (2)$$

$$\mu_1(w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1})(t)\frac{d\alpha^2}{ds} - (\mu w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^2})(t)\frac{d\alpha^1}{ds} = \varphi_1(w_3)(t),$$

$$\mu_1(\psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1})(t)\frac{d\alpha^2}{ds} - (\mu\psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2})(t)\frac{d\alpha^1}{ds} = \varphi_2(t),$$

$$T^{13}\frac{d\alpha^2}{ds} - T^{23}\frac{d\alpha^1}{ds} + T^{11}w_{3\alpha^1}\frac{d\alpha^2}{ds} - T^{22}w_{3\alpha^2}\frac{d\alpha^1}{ds} +$$

$$+T^{12}\left(w_{3\alpha^2}\frac{d\alpha^2}{ds} - w_{3\alpha^1}\frac{d\alpha^1}{ds}\right) = P^3(s),$$

где

$$f_j \equiv f_j(w_3) = k_{j+2}w_{3\alpha^j} - w_{3\alpha^j}w_{3\alpha^j\alpha^j} - \mu_2 w_{3\alpha^{3-j}}w_{3\alpha^1\alpha^2} -$$

$$-\mu_1 w_{3\alpha^j}w_{3\alpha^{3-j}\alpha^{3-j}} - \beta_2 R^j,\ \ g_j \equiv g_j(w_3) = k_0 w_{3\alpha^j} - \beta_1 L^j, j = 1{,}2,$$

$$\varphi_1(w_3)(t) = \beta_2 P^2(s) + \left[\frac{1}{2}\mu w_{3\alpha^1}^2 + \frac{1}{2}w_{3\alpha^2}^2\right]\frac{d\alpha^1}{ds} - \mu_1 w_{3\alpha^1}(t)w_{3\alpha^2}\frac{d\alpha^2}{ds},$$

$$\varphi_2(t) = \beta_1 N^2(s), t = t(s) = \alpha^1(s) + i\alpha^2(s) \in \Gamma;$$

$$\mu_j(j = 1{,}2), \mu, \beta_j(j = 1{,}2), k_j(j = 0{,}3{,}4{,}5), k^2 = const.$$

Система (1) совместно с граничными условиями (2) описывает состояние равновесия упругой изотропной однородной оболочки с шарнирно опертыми краями в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко [1, с. 168-170, 269]. При этом: $T^{\lambda\mu}$ – усилия $(\lambda, \mu = \overline{1{,}3})$; $w_j(j = 1{,}2)$ и w_3 – тангенциальные и нормальное перемещение точек срединной поверхности S_0 оболочки; $\psi_j(j = 1{,}2)$ – углы поворота нормальных сечений S_0, $R^j(j = \overline{1{,}3}), L^k(k = 1{,}2), N^2, P^2, P^3$ – компоненты внешних сил, действующих на оболочку; α^1, α^2 – декартовы координаты точек области Ω, гомеоморфной S_0.

Краевую задачу А будем изучать в обобщенной постановке. Считаем выполненными следующие условия:

a) Ω – односвязная область с границей $\Gamma \in C^1_{2\beta}$ (начало координат лежит внутри области Ω),

b) внешние силы $R^j(j = \overline{1{,}3})$ и $L^k(k = 1{,}2)$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$, компоненты внешних сил N^2, P^2, P^3 принадлежат пространству $C_\beta(\Gamma)$.

Здесь и далее $2 < p < \frac{2}{1-\beta}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

Определение. Обобщенным решением задачи А назовем вектор обобщенных перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2), a \in W_p^{(2)}(\Omega)$, почти всюду удовлетворяющий системе (1) и в каждой точке Γ граничным условиям (2).

Данная задача является непосредственным развитием задач, исследованных в [2], [3]. В основе метода исследования лежат интегральные представления для функций $w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2$, содержащие произвольные голоморфные функции. Отличие состоит в том, что для нахождения голоморфных функций в [2], [3] используются явные представления решений задачи Римана-Гильберта в единичном круге. В данной работе исследование происходит в произвольной области Ω и голоморфные функции ищутся в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями. Эти плотности определяются как решения системы одномерных сингулярных интегральных уравнений. Построенные таким образом интегральные представления позволяют свести исходную задачу А к одному нелинейному операторному уравнению в соболевском пространстве вида $v - G_* v = 0$, где $G_* v$ – нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(1)}(\Omega)$, причем для любых функций $v_j(j = 1{,}2) \in W_p^{(1)}(\Omega)$, принадлежащих шару $\|v\|_{W_p^{(1)}(\Omega)} < r$, справедлива следующая оценка $\|G_* v^1 - G_* v^2\|_{W_p^{(1)}(\Omega)} \le q_* \|v^1 - v^2\|_{W_p^{(1)}(\Omega)}$. Здесь функции $v = v_2 + iv_1$, $v_j = w_{3\alpha^j} + \psi_j (j = 1{,}2)$.

Пусть радиус r шара и внешние силы, действующие на оболочку, таковы, что выполняются условия

$$q_* < 1, \|G_*(0)\|_{W_p^{(1)}(\Omega)} < (1 - q_*)r. \tag{3}$$

Тогда справедлива следующая основная

Теорема. *Пусть выполнены условия a), b), неравенства (3). Тогда для разрешимости краевой задачи A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int_\Gamma P^2(s)ds + \iint_\Omega R^2\, d\alpha^1 d\alpha^2 = 0.$$

В случае его выполнения задача имеет обобщенное решение

$$a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega).$$

Литература:

1. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1975).
2. Timergaliev S.N., Kharasova L.S. On the existence of solutions of one nonlinear boundary-value problem for shallow shells of Timoshenko type with simply supported edges / Timergaliev S.N., Kharasova L.S. // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Vol. 158, 2016, Code 012092, doi:10.1088/1757-899X/158/1/012092
3. Kharasova L.S. On the question of the existence of solutions of one nonlinear boundary-value problem for the system of differential equations of the theory of shallow shells of Timoshenko type / Kharasova L.S. // IOP Conf. Series: Journal of Physics 1158 (2019) 032011. – PP. 1-6. doi:10.1088/1742-6596/1158/3/032011

Об авторах:

Харасова Лилия Сергеевна, старший преподаватель, Набережночелнинский институт К(П)ФУ, Набережные Челны, Россия, kharasova.liya@mail.ru

About the authors:

Lilia S. Kharasova, Senior Lecturer, Naberezhnye Chelny Institute of K(P)FU, Naberezhnye Chelny, Russia, kharasova.liya@mail.ru

УДК 591.65

Шакиров И.А.

Аппроксимация константы Лебега оператора Фурье логарифмической функцией

Константа Лебега L_n классического оператора Фурье равномерно приближается семейством логарифмических функций, зависящих от двух параметров. Рассмотрен случай, когда соответствующий остаточный член имеет немонотонное поведение. Результат по аппроксимации константы Лебега указанным семейством функций усиливает ранее полученные результаты, соответствующие случаям строгого убывания и возрастания остаточного члена. Изучены различные модификации логарифмического приближения L_n.

Ключевые слова: ряд Фурье, константа Лебега оператора Фурье, асимптотическая формула, двусторонняя оценка константы Лебега, экстремальная задача

Iskander A. Shakirov

Approximation of the Lebesgue Constant of the Fourier Operator by a Logarithmic Function

The Lebesgue constant L_n of the classical Fourier operator is uniformly approximated by a family of logarithmic functions that depend on two parameters. The case where the corresponding residual term has non-monotonic behavior is considered. The obtained result of Lebesgue constant approximation by indicated family of functions strengthens the known results corresponding to cases of strict decrease and increase of the residual term. Various modifications of the logarithmic approximation L_n are studied.

Keywords: Fourier series, Lebesgue constant of Fourier operator, asymptotic formula, two-sided Lebesgue constant estimate, extreme problem

1. Введение. При изучении равномерной сходимости частичных сумм ряда Фурье

$$S_n(x;\, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(s) D_n(t-s)ds, \quad t \in [0,\, 2\pi] \qquad (D_n(u) = \frac{\sin(n+1/2)u}{2\sin(u/2)})$$

к исходной функции $x = x(t)$ важную роль играет константа Лебега

$$L_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt, \qquad n \in \mathrm{N} \qquad (L_0 = 1) \cdot \tag{1}$$

В первой половине двадцатого века Л. Фейером [1], Г. Сеге [2], Г. Харди [3] для фундаментальной характеристики (1) классического оператора Фурье $S_n:\ C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ были получены основные формулы, позволяющие провести ее дальнейшее исследование, определено логарифмическое поведение L_n [4] с асимптотически точным коэффициентом $4/\pi^2$ вида

$$L_n = L(n) = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1), \qquad n \to \infty \ . \tag{2}$$

Неопределенная величина в (2) установлена Г. Ватсоном в работе [5]:

$$O(1) = \lim_{n\to\infty}(L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln n) \overset{def}{=} \tilde{\alpha}_0 = 1.270353241\cdots \ . \tag{3}$$

Несколько позднее на основе (3) П.В. Галкин [6], а затем В.И. Жук и Г.И. Натансон в их совместной монографии [7] получили двустороннюю оценку вида

$$1 \le L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) < 1.2706\cdots, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots. \tag{4}$$

С целью улучшения оценок для разности в (4) и более строгого изучения поведения константы Лебега (1) в работах автора [8], [9] была введена и исследована функция погрешности (остаточный член) общего вида

$$O_n(a,\ b) \overset{def}{=} O(n; a, b) = L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b, \quad n \in \mathrm{N} \qquad ((a,\ b) \in \Omega = [0,1]\times[0,\ \frac{3}{2}]), \tag{5}$$

зависящая от двух параметров $a,\ b$. Из результатов упомянутых выше работ следует, что за пределами области Ω решение задачи на наилучшее приближение константы (1) отсутствует. Иначе говоря, значения параметров a и b, обеспечивающие такое приближение в формуле

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) + b, \qquad n \in \mathrm{N}, \qquad (a,\, b) \in \Omega = D \times B, \tag{6}$$

следует искать только при $a \in D = [0,\ 1]$ и $b \in B = [0,\ 1.5]$.

Выбор оптимальных значений параметров в (6) относится к актуальным задачам теории приближения функций. В конкретных подобластях $\Omega^{\downarrow} \subset \Omega$ и $\Omega^{\uparrow} \subset \Omega$, в которых функция погрешности (5) соответственно строго убывает и строго возрастает, решены экстремальные задачи

$$\inf_{(a,\ b)\in\Omega^{\downarrow}} \sup_{n\in\mathrm{N}} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right| \quad [10], \qquad \inf_{(a,\ b)\in\Omega^{\uparrow}} \sup_{n\in\mathrm{N}} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right| \quad [11],$$

где $\Omega^{\downarrow} = D^{\downarrow} \times B \qquad (D^{\downarrow} = [0,\ 0.5] \subset D)$,

$\Omega^{\uparrow} = D^{\uparrow} \times B \qquad (D^{\uparrow} = [a^{\uparrow},\ 1] \subset D, \qquad a^{\uparrow} = -1 + \frac{1}{2}(\exp\frac{2}{7} - 1)^{-1} = 0.511888596\cdots)$.

Введем экстремальную величину (наилучшее приближение)

$$E \overset{def}{=} \inf_{(a,\ b)\in\Omega} \sup_{n\in\mathrm{N}} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right|, \qquad (a,\ b) \in \Omega \subset R^2, \tag{7}$$

позволяющую судить об аппроксимативных качествах произвольно выбранного логарифмического приближения вида (6), где $\Omega = \Omega^{\downarrow} \cup \widetilde{\Omega} \cup \Omega^{\uparrow}, \quad \Omega^{\downarrow} \cap \widetilde{\Omega} \cap \Omega^{\uparrow} = \varnothing, \quad \widetilde{\Omega} = \widetilde{D} \times B, \quad \widetilde{D} = (0.5,\ a^{\uparrow})$.

В рамках данной работы получены следующие результаты:

- величина (7) строго оценена сверху в областях $\Omega^{\downarrow},\ \widetilde{\Omega},\ \Omega^{\uparrow}$, соответствующих случаям строго убывания, неопределенного (немонотонного) поведения и строго возрастания функции погрешности $O_n(a,\ b)$; среди них наилучшей является оценка

$$E \le \widetilde{E} \overset{def}{=} \inf_{(a,\ b)\in\widetilde{\Omega}} \sup_{n\in\mathrm{N}} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right| < \widetilde{\varepsilon}_1 = 0.000317632\cdots, \qquad \widetilde{\Omega} \subset \Omega,$$

соответствующая случаю немонотонного поведения остаточного члена (5);

- изучены модифицированные экстремальные задачи

$$E_k \overset{def}{=} \inf_{(a,\ b)\in\Omega} \sup_{n\in\mathrm{N}_k} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right| \qquad (\mathrm{N}_k = \{k,\ k+1,\ k+2,\ \cdots\} \subseteq \mathrm{N}, \quad E_1 = E), \tag{8}$$

где с целью сравнения наилучших приближений $E,\ E_k$ подробно изучены случаи $k=3$ и $k=7$;

- рассмотрены другие модификации приближения L_n вида (6).

2. Вспомогательные результаты. Приведем определения классов функций $V_{\delta}^{\pm}\ (V_{\delta}^{+} \vee V_{\delta}^{-})$, которые использовались в [10], [11] при обосновании основных утверждений этих работ; здесь их применим для исследования поведения функции погрешности (5), когда параметры $a,\ b$ принадлежат области $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$.

Определение 2.1. *Строго монотонную функцию* $\varphi = \varphi(n)\ (n \in D = D(\varphi) \subseteq \mathrm{N})$ *дискретного аргумента, имеющую малое изменение* $\delta = \delta(\varphi)$ *области значений* $R(\varphi)$, *назовем функцией с малой вариацией; классы таких функций обозначим через* V_{δ}^{+} *и* V_{δ}^{-}, *где знак плюс используется в случае возрастания функций в области* D, *минус — при их убывании,* $\delta = \delta(\varphi) = \sup\{\varphi(n) | n \in D\} - \inf\{\varphi(n) | n \in D\}$.

Замечание 2.1. Дискретные функции (последовательности) из классов $V_{\delta}^{\pm}$ *обладают тем замечательным свойством, что относительно большие изменения их областей значений (вариации) происходят при первоначальных значениях аргумента* n *(например, при* $n = 1,\ 2,\ 3$*) с последующей «стабилизацией» этих последовательностей около вполне определенных асимптот. В п. 4 указанное свойство используем для уменьшения ранее установленной погрешности аппроксимации* L_n *логарифмическими функциями вида (6).*

Приведем необходимые в дальнейшем результаты работ [10], [11]. При этом особое внимание обратим теоремам, соответствующим области $D^{\downarrow}$. Они существенно будут использованы при получении большинства результатов данной работы.

ТЕОРЕМА 2.1 [10]. *Произвольно выбранным значениям параметра* $a \in D^{\downarrow} = [0,\ 0.5]$ *соответствуют не улучшаемые двусторонние оценки для* L_n *вида*

$$\frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) + \widetilde{\alpha}_0 \le L_n \le \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) + L_1 - \frac{4}{\pi^2}\ln(1+a), \quad n \in \overline{\mathrm{N}} \tag{9}$$

с вариацией равной $\delta = \delta(a) = L_1 - \frac{4}{\pi^2}\ln(1+a) - \widetilde{\alpha}_0, \quad a \in D^{\downarrow} \subset D$ *;*

нижняя и верхняя равенства в (9) достигаются соответственно при $+\infty \in \overline{\mathrm{N}}$ *и* $n = 1$, *где*

$L_1 = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} = 1.435991124\cdots, \qquad \overline{\mathrm{N}} \overset{def}{=} \mathrm{N} \cup \{+\infty\}$.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 2.1 значению параметра $a = 1/2$ *соответствует наилучшая среди (9) не улучшаемая двусторонняя оценка*

$$\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}) + \widetilde{\alpha}_0 \le L_n \le \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}) + L_1 - \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{3}{2}, \qquad n \in \overline{\mathrm{N}} \tag{10}$$

с вариацией $\delta(\frac{1}{2}) = L_1 - \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{3}{2} - \widetilde{\alpha}_0 = 0.00130906\cdots$.

ТЕОРЕМА 2. [10]. *Для всех значений параметра* $a \in D^{\downarrow}$ *остаточный член (5) является строго убывающей функцией аргумента* $n \in \mathrm{N}$ $(O_n(a,\ b) \in V_\delta^-)$*;*

наилучшее равномерное приближение в (6) достигается при значениях параметров

$a = a^{\downarrow} = 0.5$, $b = b^{\downarrow} = 1.27100777\cdots$ $((a^{\downarrow},\ b^{\downarrow}) \in \Omega^{\downarrow} \subset \Omega)$,

то есть они обеспечивают решение экстремальной задачи

$$\varepsilon^{\downarrow} \overset{def}{=} \inf_{(a,\ b)\in\Omega^{\downarrow}} \sup_{n\in\mathrm{N}} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right| = \sup_{n\in\mathrm{N}} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a^{\downarrow}) - b^{\downarrow} \right| = 0.00065453\cdots \tag{11}$$

ТЕОРЕМА 2.3 [11]. *Для всех значений параметра* $a \in D^{\uparrow}$ *остаточный член (5) является строго возрастающей функцией аргумента* n $(O_n(a,\ b) \in V_\delta^+)$*;*

наилучшее равномерное приближение в (6) достигается при

$a = a^{\uparrow} = 0.51188859\cdots$, $b = b^{\uparrow} = 1.26940801\cdots$ $((a^{\uparrow},\ b^{\uparrow}) \in \Omega^{\uparrow} \subset \Omega)$,

то есть они обеспечивают решение экстремальной задачи

$$\varepsilon^{\uparrow} \overset{def}{=} \inf_{(a,\ b)\in\Omega^{\uparrow}} \sup_{n\in\mathrm{N}} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right| = \sup_{n\in\mathrm{N}} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a^{\uparrow}) - b^{\uparrow} \right| = 0.00094522\cdots . \tag{12}$$

В литературе изучению констант Лебега различных аппроксимирующих полиномов (соответствующих им операторов), имеющих большое практическое значение, всегда обращалось и обращается особое внимание. Например, в случае рациональной аппроксимации функции (полиномиальная интерполяция с весом) достаточно полные сведения о поведении констант Лебега содержатся в работе [12] и приведенном обзоре литературы. Соответствующие классическим интерполяционным полиномам Лагранжа фундаментальные характеристики последовательно изучены, в работах [13]-[17]. Заметим, что формула для константы Лебега $\lambda_n^* = (1/n)\sum_{k=0}^{n-1} ctg[\pi(2k+1)/4n],\quad n \in \mathrm{N}$ была установлена в работе немецких математиков [13]. В ней отсутствовало строгое доказательство некоторых эпизодов теоремы 3 из монографии В.К. Дзядыка [14, с. 43], о чем отмечается в замечании на странице 46. Данный факт в конце введения работы [15] трактован так, что «…в работе [14, с. 43] не было полной строгости в доказательстве формулы для λ_n^*», что является ошибочным утверждением автора Шакирова И.А.

3. Основные результаты по аппроксимации L_n **.** Введем в рассмотрение функцию, зависящую от параметра c , вида

$$y_n(c) \overset{def}{=} y(n,\ c) = \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+c) + \widetilde{\alpha}_0, \quad n \in \mathrm{N} \qquad (c \in D^* = (0,\ a^{\uparrow} - \frac{1}{2}))\ . \tag{13}$$

Здесь сдвиг $a \overset{def}{=} 1/2 + c$ $(c \in D^* = (0,\ 0.011888596\cdots))$ аргумента n логарифма принадлежит интересующей нас области $\widetilde{D} = (0.5,\ a^{\uparrow})$ и при изучении поведения константы Лебега L_n позволяет напрямую использовать результаты предыдущего пункта. Согласно свойству логарифма функция $y(n,\ c)$ является строго возрастающей по аргументу c при произвольно выбранном значении аргумента n , то есть имеет место импликация

$$\forall c_1,\ c_2 \in D^*:\ \ c_1 < c_2 \qquad \Rightarrow \qquad y(n,\ c_1) < y(n,\ c_2), \quad n \in \mathrm{N}\ . \tag{14}$$

Используя результаты теорем 2.2, 2.3, в которых функция погрешности (5) имеет монотонное поведение в областях $\Omega^{\downarrow}$, $\Omega^{\uparrow}$, а также включения $\Omega^{\downarrow} \subset \Omega$, $\Omega^{\uparrow} \subset \Omega$, для экстремальной величины (7) легко установим нижеследующие оценки:

$$E < \inf_{(a,\,b)\in\Omega^{\downarrow}} \sup_{n\in\mathrm{N}} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right| = \varepsilon^{\downarrow} = 0.00065453\cdots,$$
$$E < \inf_{(a,\,b)\in\Omega^{\uparrow}} \sup_{n\in\mathrm{N}} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right| = \varepsilon^{\uparrow} = 0.00094522\cdots. \quad (15)$$

Когда $O_n(a,\ b)$ имеет немонотонное поведение, изучение остаточного члена (5) константы Лебега (1) оператора Фурье относится к исключительному случаю. Для фундаментальных характеристик других общеизвестных операторов аналогичные вопросы также не изучены до сих пор. Исходя из хода доказательства теорем 2.2 и 2.3, можно лишь предположить, что лучшую (чем в (15)) оценку величины E следует ожидать в области $\widetilde{\Omega} = \widetilde{D}\times B$, где функция погрешности (5) имеет неопределенное поведение. Ниже установим справедливость этой гипотезы.

Теорема 3.1. Если коэффициенты $a,\ b$ *в (6) соответственно равны*

$$\widetilde{a} = \frac{1}{2} + \widetilde{c}_1 = 0.504852813\cdots, \qquad \widetilde{b} = \widetilde{\alpha}_0 = 1.270353241\cdots \qquad ((\widetilde{a},\ \widetilde{b})\in\widetilde{\Omega}\subset\Omega),$$

то для левой и правой частей приближенного равенства

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n + \frac{1}{2} + \widetilde{c}_1) + \widetilde{\alpha}_0\,, \qquad n\in\mathrm{N} \qquad (\,\widetilde{c}_1 = 0.004852813\cdots) \quad (16)$$

имеют место следующие соотношения:

$$L_n < \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\widetilde{c}_1) + \widetilde{\alpha}_0 \equiv y_n(\widetilde{c}_1), \qquad n\in\mathrm{N}_2 = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\cdots\}\subset\mathrm{N}\,; \quad (17)$$

$$n=1 \;\Rightarrow\; L_1 = y_1(\widetilde{c}_1)\,; \qquad +\infty\in\overline{\mathrm{N}} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty}[L_n - y_n(\widetilde{c}_1)]=0, \quad (18)$$

где $\widetilde{\alpha}_0$ *— константа Ватсона* [5], *формула для константы* $\widetilde{c}_1$ *определена в (22).*

Доказательство. Согласно следствию теоремы 2.1 графики функций

$$y = L_n = L(n), \qquad y = y(n,\,0) = \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}) + \widetilde{\alpha}_0\,, \qquad n\in\mathrm{N},$$

определенных в координатной системе nOy, встречаются лишь в бесконечно удаленной точке, а при натуральных значениях аргумента n имеет место строгое неравенство

$$\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}) + \widetilde{\alpha}_0 < L(n), \quad n\in\mathrm{N}\,.$$

Сказанное запишем в виде

$$y(n,\,0) < L(n), \quad n\in\mathrm{N}\,; \qquad \lim_{n\to+\infty}\,[L(n) - y(n,\,0)]=0\,. \quad (19)$$

Используя (14) и (19), а также управляя (варьируя) параметром $c \ \ (c\in D^*)$, в неравенстве $y(n,\,c)\le L(n)$ добьемся совпадения левой и правой его частей при произвольно выбранном значении аргумента n :

$$y(n,\,c)=L(n) \;\Leftrightarrow\; \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+c) + \widetilde{\alpha}_0 = L(n) \;\Leftrightarrow\; c = \exp[\frac{\pi^2}{4}(L_n - \widetilde{\alpha}_0)] - n - \frac{1}{2} \equiv c(n)\,.$$

С учетом функциональной зависимости $c = c(n),\ \ n\in\mathrm{N}$ и неравенства (19) легко установим справедливость равносильностей:

$$\frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) + \widetilde{\alpha}_0 < L(n), \quad n\in\mathrm{N} \quad\Leftrightarrow\quad \ln(n+0.5) < \frac{\pi^2}{4}[L(n) - \widetilde{\alpha}_0], \quad n\in\mathrm{N} \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \exp[\frac{\pi^2}{4}(L(n)-\widetilde{\alpha}_0)] - n - \frac{1}{2} > 0, \quad n\in\mathrm{N} \qquad\Leftrightarrow\qquad c(n) > 0, \quad n\in\mathrm{N}\,;$$

причем $\lim_{n\to+\infty} c(n) = 0$. В итоге для каждого выбранного $n = n_0$ получили однозначно определенное значение сдвига аргумента логарифмической функции

$$c(n_0) = \exp[\frac{\pi^2}{4}(L_{n_0} - \widetilde{\alpha}_0)] - n_0 - \frac{1}{2}, \qquad n_0\in\mathrm{N}, \quad (20)$$

которое с учетом строгого возрастания и выпуклости функций $L(n),\ \ y(n,\,c) \ \ (n\in\mathrm{N},\ \ c\in D^*)$ обеспечивает выполнение соотношений:

$$\tilde{\alpha}_0+\frac{4}{\pi^2}\ln[n+\frac{1}{2}+c(n_0)]<L_n, \qquad n\in\{1,\ 2,\ 3,\cdots,\ n_0-1\};$$

$$\tilde{\alpha}_0+\frac{4}{\pi^2}\ln[n_0+\frac{1}{2}+c(n_0)]=L_{n_0}, \qquad n=n_0;$$

$$\tilde{\alpha}_0+\frac{4}{\pi^2}\ln[n+\frac{1}{2}+c(n_0)]>L_n, \qquad n\in\{\ n_0+1,\ n_0+2,\ n_0+3,\cdots\}. \tag{21}$$

Полагая в них и в формуле (20) $n_0=1$, для константы Лебега L_n получим приближенную формулу (16), где

$$\tilde{c}_1\overset{def}{=}c(1)=-\frac{3}{2}+\exp[\frac{\pi^2}{4}(L_1-\tilde{\alpha}_0)]=0.004852813\cdots, \quad (0<\tilde{c}_1<0.011888596\cdots). \tag{22}$$

Соотношения (17), (18) следуют из (21), (22) и предельного равенства $\lim\limits_{n\to+\infty}[\,y_n(\tilde{c}_1)-L_n\,]=0$; последнее легко устанавливается с использованием равенства из (19):

$$\lim_{n\to+\infty}[\,y_n(\tilde{c}_1)-L_n\,]=\lim_{n\to+\infty}[\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\tilde{c}_1)+\tilde{\alpha}_0-L_n]=\lim_{n\to+\infty}[\frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5)+\tilde{\alpha}_0-L_n]+$$

$$+\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+0.5+\tilde{c}_1}{n+0.5}=\lim_{n\to+\infty}[\,y(n,\,0)-L_n\,]+\frac{4}{\pi^2}\lim_{n\to+\infty}\ln(1+\frac{\tilde{c}_1}{n+0.5})=0\ .$$

Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. Для допущенной в приближенной формуле (16) равномерной (дискретной) погрешности $\tilde{\varepsilon}_1$ *и наилучшего приближения (7) верны следующие оценки:*

$$\tilde{\varepsilon}_1\overset{def}{=}\sup_{n\in\mathrm{N}}[\tilde{\alpha}_0+\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\tilde{c}_1)-L_n\,]=0.000317632\cdots; \qquad E<0.000317633\,. \tag{23}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изучим поведение соответствующего приближенному равенству (16) остаточного члена

$$O_n\overset{def}{=}O_n(\tilde{a},\tilde{b})=\tilde{\alpha}_0+\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\tilde{c}_1)-L_n\,, \quad n\in\mathrm{N} \qquad (\tilde{c}_1=0.004852813\cdots. \tag{24}$$

Во-первых, согласно (17), (18) остаточный член (24) обращается в нуль на концах расширенной области $\overline{\mathrm{N}}$ и имеет только положительные значения при остальных значениях аргумента n, то есть

$$O_n>0,\quad n\in\mathrm{N}_2\,;\qquad O_1=0,\qquad \lim_{n\to+\infty}O_n=0 \qquad (\Leftrightarrow\ O_n\ge 0,\quad n\in\overline{\mathrm{N}})\,. \tag{25}$$

Во-вторых, последовательность (O_n) представляется в виде разности двух неотрицательных, строго убывающих к нулю, имеющих одинаковые области значений и вариации функций

$$\tau_n\overset{def}{=}\frac{4}{\pi^2}\ln(1+\frac{\tilde{c}_1}{n+0.5}), \qquad \nu_n\overset{def}{=}[L_n-\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2})-\tilde{\alpha}_0], \quad n\in\mathrm{N}:$$

$$O_n=\tilde{\alpha}_0+\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\tilde{c}_1)-L_n=[\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\tilde{c}_1)-\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}]-$$

$$-[L_n-\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2})-\tilde{\alpha}_0]\equiv\tau_n-\nu_n\,;$$

$$\tau_n\,,\ \nu_n\in V_\delta^-, \qquad \delta=L_1-\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{3}{2}-\tilde{\alpha}_0=0.00130906\cdots.$$

Другими словами, для последовательностей (τ_n), (ν_n), (O_n) имеют место соотношения:

$$\tau_n>0,\quad n\in\mathrm{N}_2 \qquad (\tau_1=\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{3/2+\tilde{c}_1}{3/2}=\frac{4}{\pi^2}\ln[\exp\frac{\pi^2}{4}(L_1-\tilde{\alpha}_0)]-\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{3}{2}=$$
$$=L_1-\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{3}{2}-\tilde{\alpha}_0=\delta, \qquad \lim_{n\to+\infty}\tau_n=0); \tag{26}$$

$$\nu_n>0,\ n\in\mathrm{N}_2 \qquad (\nu_1=L_1-\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{3}{2}-\tilde{\alpha}_0=\delta, \qquad \lim_{n\to+\infty}\nu_n=0, \quad \text{см. (19)}\,); \tag{27}$$

$$O_n=\tau_n-\nu_n<\ \tau_n, \qquad n\in\mathrm{N}_2 \qquad (O_1=0, \qquad \lim_{n\to+\infty}O_n=0\,)\,, \tag{28}$$

где $O_2 = 0.000309398\cdots,\ O_3 = 0.000317632\cdots,\ O_4 = 0.000289075\cdots,\ O_5 = 0.000258462\cdots$.

Учитывая указанные значения $O_1 - O_5$, неравенства (25)-(28), оценку $\tau_n \le \tau_6 = \dfrac{4}{\pi^2}\ln(1+\dfrac{\widetilde{c}_1}{6+0.5}) = 0.000302467\cdots\ (n \ge 6)$, а также известный алгоритм обоснования ограниченности сходящейся последовательности (O_n), определим искомую величину $\widetilde{\varepsilon}_1$:

$$\widetilde{\varepsilon}_1 = \sup_{n\in\mathrm{N}} O_n = \max\left\{\sup(O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4,\ O_5),\quad \sup_{n\in\mathrm{N}_6} O_n\right\} = \max\{O_3\ ,\ \ \tau_6\} =$$
$$= \max\{0.000317632\cdots,\quad 0.000302467\cdots\} = 0.000317632\cdots .$$

Теперь, учитывая равенство $a = 1/2 + c$, величину (7) оценим сверху:

$$E = \inf_{(a,\,b)\in\Omega}\ \sup_{n\in\mathrm{N}}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b\right| \le \inf_{c\in D^*,\ b\in B}\ \sup_{n\in\mathrm{N}}\ [b + \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+c) - L_n\ ] <$$
$$< \sup_{n\in\mathrm{N}}[\ \widetilde{\alpha}_0 + \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\widetilde{c}_1) - L_n\ ] = \sup_{n\in\mathrm{N}} O_n = \widetilde{\varepsilon}_1 < 0.000317633 \qquad (D^*\times B \subset \Omega\ ).$$

Теорема 3.2 доказана.

Полученные в пунктах 2 и 3 результаты позволяют сформулировать следующее

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Сравнение констант $\varepsilon^{\downarrow},\ \varepsilon^{\uparrow},\ \widetilde{\varepsilon}_1$ *из (11), (12), (23) показывает, что экстремальная величина (7) наилучшим образом оценивается сверху (см. (15), (23)) в третьем случае, соответствующем немонотонному поведению остаточного члена (5), то есть* $E < \widetilde{\varepsilon}_1 < 0.000317633$.

4. Некоторые модификации задач по аппроксимации L_n . Вначале усилим полученные в предыдущем пункте результаты, связанные с приближением вида (6) и наилучшим приближением (7). Затем оценим экстремальные величины (8), для определенности, при значениях индексов $k=3$ и $k=7$; рассмотрим другие модификации приближения константы Лебега L_n ; сравним результаты, полученные в пунктах 3 и 4.

Теорема 4.1. В приближенной формуле

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\widetilde{c}_1) + \widetilde{\alpha}_0 - \frac{1}{2}\widetilde{\varepsilon}_1\ ,\qquad n\in\mathrm{N} \tag{29}$$

для допущенной абсолютной погрешности $\hat{\varepsilon}_1$ *и наилучшего приближения* E *имеют место в два раза лучшие, чем в теореме 3.2, оценки:*

$$\hat{\varepsilon}_1 \overset{def}{=} \sup_{n\in\mathrm{N}}\left|\ \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\widetilde{c}_1) + \widetilde{\alpha}_0 - \frac{1}{2}\widetilde{\varepsilon}_1 - L_n\right| = 0.000158816\cdots,\qquad E < 0.000158817, \tag{30}$$

где значение $\widetilde{\varepsilon}_1 = O_3 = 0.000317632\cdots$ *определено в (23) (* O_3 *— максимальное отклонение остаточного члена (24) от нуля),* $\widetilde{\alpha}_0 = 1.270353241\cdots$ *— константа Ватсона.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теорем 3.1, 3.2 константа Лебега L_n и логарифмическая функция совпадают на концах расширенной области $\overline{\mathrm{N}}$ (см. (18), (25)). Исключая далее это требование и равномерно аппроксимируя остаточный член (24) прямой $y = O_3/2$, получим приближенную формулу (29):

$$O_n \approx \frac{1}{2}O_3\ ,\quad n\in\mathrm{N}\qquad \Leftrightarrow\qquad \widetilde{\alpha}_0 + \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\widetilde{c}_1) - L_n \approx \frac{1}{2}\widetilde{\varepsilon}_1,\quad n\in\mathrm{N}\qquad \Leftrightarrow\qquad (29)\ .$$

При этом для допущенной в (29) абсолютной погрешности и наилучшего приближения (7) имеем:

$$\hat{\varepsilon}_1 = \widetilde{\varepsilon}_1/2 = 0.000158816\cdots,\qquad E < 0.000158817.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. В модифицированной приближенной формуле

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\widetilde{c}_3) + \widetilde{\alpha}_0 \equiv y_n(\widetilde{c}_3),\qquad n>3 \tag{31}$$

для допущенной равномерной (дискретной) погрешности $\widetilde{\varepsilon}_3$ *и наилучшего приближения* E_3 *из (8) верны оценки:*

$$\widetilde{\varepsilon}_3 \overset{def}{=} \sup_{n\in N_3} [\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\widetilde{c}_3)+\widetilde{\alpha}_0 - L_n] = 0.000060592\cdots , \qquad E_3 < 0.000060593, \tag{32}$$

где

$$\widetilde{c}_3 \overset{def}{=} c(3) = -\frac{7}{2} + \exp[\frac{\pi^2}{4}(L_3 - \widetilde{\alpha}_0)] = 0.002107046\cdots \quad (\widetilde{c}_3 \in D^* = (0,\ 0.011888596\cdots)). \tag{33}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приближенная формула (31) определена на подмножестве N_4 множества натуральных чисел, а потому первые три значения константы Лебега вычислим точно согласно формуле Л. Фейера

$L_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}tg\frac{\pi k}{2n+1}$ [1] :

$L_1 = 1.435991124\cdots, \quad L_2 = 1.642188435\cdots, \quad L_3 = 1.778322861\cdots$.

С целью вычисления остальных значений $L_n \quad (n>3)$ построим приближенную формулу (31) по аналогии с формулой (16). Полагая в (20), (21) $n = n_0 = 3$, для остаточного члена получим представление

$$O_n^{(3)} \overset{def}{=} \widetilde{\alpha}_0 + \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\widetilde{c}_3) - L_n, \quad n \in N_3 \qquad (O_3^{(3)} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} O_n^{(3)} = 0), \tag{34}$$

для которого выполняется неравенство $O_n^{(3)} > 0, \quad n \in N_4$, причем

$O_4^{(3)} = 0.000041973\cdots, \quad O_5^{(3)} = 0.000056259\cdots, \quad O_6^{(3)} = 0.000060464\cdots,$
$O_7^{(3)} = 0.000060592\cdots, \quad O_8^{(3)} = 0.000059365\cdots, \quad O_9^{(3)} = 0.000056672\cdots$.

Функцию погрешности (34) представим в виде разности двух последовательностей и оценим сверху:

$$O_n^{(3)} = \frac{4}{\pi^2}\ln(1+\frac{\widetilde{c}_3}{n+0.5}) - [L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}) - \widetilde{\alpha}_0] \overset{def}{=} \tau_n^{(3)} - \nu_n < \tau_n^{(3)}, \qquad n \in N_3 ,$$

где составляющие ν_n (см. (27)) и $\tau_n^{(3)} = \frac{4}{\pi^2}\ln(1+\frac{\widetilde{c}_3}{n+0.5})$ остаточного члена (34) являются строго убывающими к нулю функциями, имеют положительные значения и малые вариации $(\tau_n^{(3)},\ \nu_n \in V_\delta^-, \quad \delta = L_3 - \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{7}{2} - \widetilde{\alpha}_0 = 0.000243913\cdots)$ при любых значениях аргумента $n \geq 3$, причем

$\tau_n^{(3)} \leq \tau_{14}^{(3)} = \frac{4}{\pi^2}\ln(1+\frac{\widetilde{c}_3}{14+0.5}) = 0.000058889\cdots \quad \forall\ n \geq 14$.

Применяя использованный в теореме 3.2 алгоритм обоснования ограниченности сходящейся последовательности для $(O_n^{(3)})_{n\geq 3}$, установим равенство из (32):

$$\widetilde{\varepsilon}_3 \overset{def}{=} \sup_{n\in N_3} O_n^{(3)} = \max\left\{\sup(O_3^{(3)},\ O_4^{(3)},\ O_5^{(3)},\ O_6^{(3)},\ O_7^{(3)}, \cdots,\ O_{12}^{(3)},\ O_{13}^{(3)}), \quad \sup_{n\in N_{14}} O_n^{(3)}\right\} =$$
$$= \max\{O_7^{(3)}, \quad \tau_{14}^{(3)}\} = \max\{0.000060592\cdots, \quad 0.000058889\cdots\} = 0.000060592\cdots .$$

Теперь оценим экстремальную величину (8) при значении индекса $k=3$:

$$E_3 = \inf_{(a,\,b)\in\Omega}\sup_{n\in N_3}\left|b+\frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - L_n\right| \leq \sup_{n\in N_3}[\widetilde{\alpha}_0 + \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\widetilde{c}_3) - L_n] =$$
$$= \sup_{n\in N_3} O_n^{(3)} < 0.000060593.$$

Теорема 4.2 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Усовершенствованное приближенное равенство (31) обеспечивает уменьшение установленной в (23) погрешности $\widetilde{\varepsilon}_1$ *более пяти раз, то есть* $\widetilde{\varepsilon}_1 / \widetilde{\varepsilon}_3 \approx 5.2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Если в (34) отказаться от условий $O_3^{(3)} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} O_n^{(3)} = 0$ *совпадения константы Лебега* L_n *и логарифмической функции на концах их расширенной области определения* $\overline{N}_3 = N \cup \{+\infty\}$, *то в модифицированной приближенной формуле*

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\tilde{c}_3)+\tilde{\alpha}_0-\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_3, \qquad n>3 \tag{35}$$

для допущенной абсолютной погрешности $\hat{\varepsilon}_3$ *и наилучшего приближения* E_3 *вида (8) имеют место в два раза лучшие, чем в теореме 4.2, оценки:*

$$\hat{\varepsilon}_3 \stackrel{def}{=} \sup_{n\in N_3}\left|\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\tilde{c}_3)+\tilde{\alpha}_0-\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_3-L_n\right| = 0.000030296\cdots \quad ; \qquad E_3<\hat{\varepsilon}_3. \tag{36}$$

Использованная в теоремах 3.2 и 4.2 схема построения приближающей константу L_n логарифмической функции позволяет далее построить приближенные уравнения, обладающие еще более лучшими аппроксимативными свойствами.

ТЕОРЕМА 4.3. В модифицированных приближенных формулах

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\tilde{c}_7)+\tilde{\alpha}_0, \qquad L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\tilde{c}_7)+\tilde{\alpha}_0-\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_7, \qquad n>7 \tag{37}$$

для погрешности $\tilde{\varepsilon}_7$ *и абсолютной погрешности* $\hat{\varepsilon}_7$ *верны равенства*

$$\tilde{\varepsilon}_7 \stackrel{def}{=} \sup_{n\in N_7}\left[\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\tilde{c}_7)+\tilde{\alpha}_0-L_n\right] = 0.000013134\cdots, \tag{38}$$

$$\hat{\varepsilon}_7 \stackrel{def}{=} \sup_{n\in N_7}\left|\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2}+\tilde{c}_7)+\tilde{\alpha}_0-\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_7-L_n\right| = 0.000006567\cdots \qquad (\hat{\varepsilon}_3/\hat{\varepsilon}_7\approx 4.6), \tag{39}$$

где $\tilde{c}_7 \stackrel{def}{=} c(7) = -\frac{15}{2}+\exp[\frac{\pi^2}{4}(L_7-\tilde{\alpha}_0)] = 0.000985507\cdots \quad (L_7 = 2.087015928\cdots, \ \tilde{c}_7\in D^*)$ *, а первые семь значений константы Лебега вычисляются точно согласно формуле Л. Фейера (см. теорему 4.2).*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Последовательности $(\tilde{\varepsilon}_n)$ *(см. (23), (32), (38)) и* $(\hat{\varepsilon}_n)$ *(см. (30), (36), (39)) сходятся к нулю с большой скоростью. Например, второе приближенное равенство в (37) обеспечивает равномерное отклонение вполне определенной логарифмической функции от константы Лебега* L_n *на величину* $\hat{\varepsilon}_7$*, имеющую порядок одна миллионная.*

Приведем еще один алгоритм построения аппроксимирующей $L_n, \ n>7$ логарифмической функции $y_n = y(n), \quad n>7$ (константы $L_1 - L_7$ находятся согласно известной формуле Фейера). С этой целью рассмотрим нижеследующую модификацию неулучшаемой двусторонней оценки (10):

$$\frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2})+\tilde{\alpha}_0 \le L_n \le \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2})+L_7-\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{15}{2}, \qquad n\in N_7. \tag{40}$$

Для полусуммы верхней и нижней оценивающих L_n функций из (40) $y_n = \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(L_7-\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{15}{2}+\tilde{\alpha}_0), \quad n>7$ имеем:

$$L_n \approx y_n, \quad n>7 \qquad (y_n = \frac{4}{\pi^2}\ln(n+\frac{1}{2})+1.270379866\cdots), \tag{41}$$

а для допущенной в (41) погрешности верна оценка

$$\breve{\varepsilon}_7 \stackrel{def}{=} \sup_{n\in N_7}|L_n-y_n| = \frac{1}{2}(L_7-\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{15}{2}-\tilde{\alpha}_0) = 0.000026625\cdots$$

Результат, соответствующий оценке экстремальной величины (8) при $k=7$, сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 4.4. Допущенная в приближенной формуле (41) абсолютная погрешность равна $\breve{\varepsilon}_7 = 0.000026625\cdots$*, которая приблизительно в 4 раза хуже величины (39), соответствующей случаю немонотонного поведения функции погрешности (5)* $(\breve{\varepsilon}_7/\hat{\varepsilon}_7\approx 4.05)$*; причем* $E_7 < \breve{\varepsilon}_7 < 0.000026626$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Из результатов теорем 3.1, 3.2 и 4.1–4.4 следует справедливость всех утверждений, сформулированных в конце введения работы.

Литература:

1. Fejer L., “Sur les singularites de la serie de Fourier des fonctions continues”, Ann. de lEc. Norm. Ser. 28 (1911), 63-103.
2. Szego G., “Uber die Lebesgueschen konstanten bei den Fourierchen reihen”, Math. Z. 9:1-2 (1921), 163-166.
3. Hardi G.H., “Note on Lebesgues constants in the theory of Fourier series”, J. London Math. Soc. sl-17:1 (1942), 4-13.
4. Fejer L., “Lebesguesche konstanten und divergente Fourierreihen”, J. Reine Angew. Math. 138 (1910), 22-53.

5. Watson G.H., "The constant of Landau and Lebesgue", Quart. J. Math., Oxford Ser. 1 (1930), 310-318.
6. Галкин П.В., Оценки для констант Лебега", Тр. МИАН СССР 109 (1971), 3-5.
7. Жук В.В., Натансон Г.И, Тригонометрические ряды и элементы теории аппроксимации, Изд-во Ленингр. ун-та, 1983.
8. Шакиров И.А., «О неулучшаемой двусторонней оценке константы Лебега классического оператора Фурье», Вестник Казан. госуд. энергетич. ун-та 34:2 (2017), 7-17.
9. Шакиров И.А., "Об оптимальном приближении нормы оператора Фурье семейством логарифмических функций", Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры 139 (2017), 92-104.
10. Shakirov I.A., "About the Optimal Replacement of the Lebesque Constant Fourier Operator by a Logarithmic Function", Lobachevskii journal of mathem. 39:6 (2018), 841-846.
11. Shakirov I.A., "On optimal approximations of the norm of the Fourier operator by a family of logarithmic functions", J. of Math. Sciences 241:3 (2019), 354-363.
12. Лукашов А.Л., «Рациональные интерполяционные процессы на нескольких отрезках», Изв. Сарат. ун-та. Серия Математика. Механика. Информатика 5 (2005), вып. 1, 34-48.
13. Ehlich H., Zeller K., "Auswertung der Normen von Interpolations operatoren", Math. Ann. 164 (1966), 105-112.
14. Дзядык В.К., «Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений», Наук. думка, Киев, 1988.
15. Шакиров И.А., «О фундаментальных характеристиках семейства интерполяционных полиномов Лагранжа», Изв. Сарат. ун-та. Серия Математика. Механика. Информатика 13 (2013), вып. 1, ч. 2, 99-104.
16. Шакиров И.А., «Асимптотические формулы для функций Лебега, соответствующих семейству интерполяционных полиномов Лагранжа», Матем. заметки 102:1 (2017), 133-147.
17. Shakirov I.A., "Approximation of the Lebesgue constant of a Lagrange polynomial by a logarithmic function with shifted argument", J. of Math. Sciences 252:3 (2021), 445-452.

Об авторе:

Шакиров Искандер Асгатович, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», г. Набережные Челны, Россия

About the author:

Iskander A. Shakirov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia

УДК 517.968.2

Шакирова И.М.

Редукция уравнения Вольтерра в векторно-матричном виде к задаче Коши

В данной статье рассмотрено векторно-матричное дифференциальное уравнение Вольтерра, для которого выписаны условия, обеспечивающие редукцию его к определенной векторно-матричной задаче Коши для линейного дифференциального уравнения. Интегрирование в квадратурах любого из этих уравнений влечет за собой возможность построения решения уравнения Вольтерра в явном виде.

Ключевые слова: уравнение Вольтерра, задача Коши, решение в квадратурах

Inna M. Shakirova

Reduction of the Volterra Equation in Vector-Matrix form to the Cauchy Problem

This article considers the vector-matrix Volterra differential equation, for which conditions are written that ensure its reduction to a certain vector-matrix Cauchy problem for a linear differential equation. Integration in quadratures of any of these equations entails the possibility of constructing a solution of the Volterra equation in an explicit form.

Keywords: Volterra equation, Cauchy problem, solution in quadratures

В настоящее время известно значительное число результатов по отысканию решений интегральных уравнений в явном виде. Многие из них отражены в справочнике [2], причем большинство случаев относится к уравнениям Фредгольма. Имеются также некоторые результаты и по построению решений уравнений Вольтерра. Например, в работе [1] речь идет об уравнении

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t) y(t) dt + f(x), x \in [\alpha, \beta], f, a_k, b_k \in C[\alpha, \beta]. \quad (1)$$

Там предложен способ его редукции к различным задачам Коши для дифференциальных уравнений. Это открывает определенные возможности для выделения случаев разрешимости (1) в квадратурах.

Основным содержанием настоящей статьи является распространение схемы рассуждений из [1] на векторно-матричное уравнение

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{m} A_k(x) B_k(t) y(t) dt + f(x), \quad (2)$$

где y, f – векторы с компонентами $(y_1, \dots, y_n)$ и $(f_1, \dots, f_n)$ соответственно, $A_k, B_k - n \times n$ – матрицы с элементами $a_{ijk}(x), b_{ijk}(t)$. По аналогии с коэффициентами из (1) в [1] матрицы A_k, B_k в (2) считаем линейно независимыми. При реализации указанной схемы соответствующие формулы изменяют свой вид, так как вместо деления на коэффициенты уравнения (1) приходится использовать обратные к A_k, B_k матрицы.

Пусть $f, A_k \in C^n[\alpha, \beta], B_k \in C[\alpha, \beta], k = \overline{1, m}$ и при этом $detA_1 \neq 0$. Применим к (2) преобразование $A_1^{-1}(x)$, продифференцируем полученный результат, затем применим $A_1(x)$. Уравнение (1) переходит при этом в соотношение

$$y' = M_0(x, y) + \sum_{k=2}^{m} A_{1,k}(x) \int_{x_0}^{x} B_k(t) y(t) dt, \qquad y(x_0) = f(x_0), \quad (3)$$

где

$$A_{1,k}(x) = A_1(x)[A_1^{-1}(x) A_k(x)]', \qquad k = \overline{2, m}, \quad (4)$$

$$M_0(x, y) = \sum_{k=1}^{m} A_k B_k y + A_1 (A_1^{-1} f)' - A_1 (A_1^{-1})' y. \quad (5)$$

Переход от (2) к (3) назовем преобразованием **A**. Заметим, что (2) и (3) имеют одинаковую структуру в правых частях, только в (3) число слагаемых в сумме уменьшилось на единицу. В левой части искомая функция преобразовалась в производную.

Нетрудно также заметить, что в силу $detA_1 \neq 0$ из линейной независимости A_k следует линейная независимость $A_{1,k}, k = \overline{2, m}$.

Предполагая, что $detA_{1,2} \neq 0$, применяем А уже к (3), в результате чего имеем

$$y'' = M_1(x, y, y') + \sum_{k=3}^{m} A_{2,k}(x) \int_{x_0}^{x} B_k(t) y(t) dt,$$

$$y(x_0) = f(x_0), \;\; y'(x_0) = M_0(x, y)|_{x=x_0} \quad (6)$$

$$M_1(x, y, y') = \sum_{k=2}^{m} A_{1,k} B_k y + A_{1,2}\left(A_{1,2}^{-1} M_0\right)' - A_{1,2}\left(A_{1,2}^{-1}\right)' y', \quad (7)$$

$$A_{2,k}(x) = A_{1,2}(x)\left[A_{1,2}^{-1}(x) A_k(x)\right]', \qquad k = \overline{3, m} \quad (8)$$

Продолжая последовательное применение преобразования **A**, получим после s шагов $(s < m - 1)$ следующие аналоги формул (3) - (5) и (6) - (8)

$$y^{(s)} = M_{s-1}\left(x, y, \dots, y^{(s-1)}\right) + \sum_{k=s+1}^{m} A_{s,k}(x) \int_{x_0}^{x} B_k(t) y(t) dt,$$

$$y(x_0) = f(x_0), \;\; y^{(j)}(x_0) = M_{j-1}\left(x, y, \dots, \; y^{(j-1)}\right)\Big|_{x=x_0}, j = \overline{1, s-1}, \quad (9)$$

$$M_{s-1}\left(x, y, \dots, y^{(s-1)}\right) = \sum_{k=s}^{m} A_{s-1,k} B_k y + A_{s-1,s}\left(A_{s-1,s}^{-1} M_{s-2}(x, y, \dots, y^{(s-2)})\right)' - A_{s-1,s}\left(A_{s-1,s}^{-1}\right)' y^{(s-1)} \quad (10)$$

$$A_{s,k}(x) = A_{s-1,s}(x)\left[A_{s-1,s}^{-1}(x) A_{s-1,k}(x)\right]', \qquad k = \overline{s+1, m} \quad (11)$$

При $s = m$ интегральных слагаемых в (9) уже не будет, то есть придем к векторно-матричному дифференциальному уравнению с известными значениями $y^{(j)}(x_0), \; j = \overline{0, m-1}$:

$$y^{(m)} = M_{m-1}\left(x, y, \dots, y^{(m-1)}\right), y(x_0) = f(x_0),$$

$$y^{(j)}(x_0) = M_{j-1}\left(x, y, \dots, \; y^{(j-1)}\right)\Big|_{x=x_0}, j = \overline{2, m-1}, \quad (12)$$

Весь изложенный процесс редукции (2) к задаче Коши (12) обеспечивается неравенствами

$$\det A_{j,j+1} \neq 0\,, j = \overline{0, m-1}\,, A_{0,1} = A_1 \tag{13}$$

Предположим теперь, что матрицы в (2) удовлетворяют несколько иным условиям гладкости $f, A_k \in C[\alpha,\beta], B_k \in C^n[\alpha,\beta], k = \overline{1,m}$. Если при этом $detB_1 \neq 0$, то введение нового искомого вектора

$$z_1 = \int\limits_{x_0}^{x} B(t)y(t)dt \tag{14}$$

позволяет с помощью интегрирования по частям привести уравнение (2) к виду

$$z_1' = N_0(x,z_1) + \sum_{k=2}^{m} D_{1,k}(x) \int\limits_{x_0}^{x} B_{1,k}(t)z_1(t)dt\,, \qquad z_1(x_0) = 0, \tag{15}$$

$$N_0(x,z_1) = B_1 f + B_1 A_1 z_1 + \sum_{k=2}^{m} B_1 A_k B_k B_1^{-1} z_1, \tag{16}$$

$$D_{1,k}(x) = B_1(x)A_k(x), \qquad B_{1,k}(t) = -[B_k(t)B_1^{-1}(t)]', k = \overline{2,m} \tag{17}$$

Процедуру перехода от (2) к (15) назовем преобразованием **B**. Результат аналогичен преобразованию **A** из п. 1: в левой части появилась производная от искомой функции, а в правой число слагаемых под знаком интеграла уменьшилось на единицу, причем матрицы $B_{1,k}$, как и B_k, линейно независимы. В предположении $detB_{1,2} \neq 0$ можно применить преобразование **B** и к (15). Вместо (14) следует взять

$$z_2 = \int\limits_{x_0}^{x} B_{1,2}(t)z_1(t)dt \tag{18}$$

В результате придем к соотношению

$$z_2'' = N_1(x,z_2,z_2') + \sum_{k=3}^{m} D_{2,k}(x) \int\limits_{x_0}^{x} B_{2,k}(t)z_2(t)dt\,, \qquad z_2{}^{(s)}(x_0) = 0, \qquad s = \overline{0,2}, \tag{19}$$

а роль (15) - (16) играют формулы

$$N_1(x,z_2,z_2') = B_{1,2}N_0(x,z_1) - B_{1,2}\left(B_{1,2}^{-1}\right)' z_1{}' + \sum_{k=2}^{m} B_{1,2}D_{1,k}B_{1,k}B_{1,2}^{-1}z_2, \tag{20}$$

$$N_{0,0}(x,z_1) = N_0\left(x, B_{1,2}{}^{-1}z_2'\right), \tag{21}$$

$$B_{2,k} = -\left[B_{1,k}B_{1,k}{}^{-1}\right]', \qquad D_{2,k} = B_{1,2}D_{1,k}, \qquad k = \overline{3,m} \tag{22}$$

Матрицы $A_{2,k}$ как и $B_{2,k}$ опять линейно независимы. При $detB_{2,3} \neq 0$ применяем преобразование **B** снова и получаем

$$z_3''' = N_2(x,z_3,z_3',z_3'') + \sum_{k=4}^{m} D_{3,k}(x) \int\limits_{x_0}^{x} B_{3,k}(t)z_3(t)dt\,, \qquad z_3{}^{(s)}(x_0) = 0, \qquad s = \overline{0,3},$$

$$N_2(x,z_3,z_3',z_3'') = B_{2,3}\left[N_{1,0}(x,z_2,z_2') - \sum_{s=0}^{1} C_2^s \left(B_{2,3}^{-1}\right)^{(2-s)} z_3^{(s+1)}\right] + \sum_{k=3}^{m} D_{3,k}B_{2,k}B_{2,3}^{-1}z_3,$$

$$N_{1,0}(x,z_2,z_2') = N_1\left(x, B_{2,3}{}^{-1}z_3', \left(B_{2,3}{}^{-1}z_3'\right)'\right),$$

$$B_{3,k} = -\left[B_{2,k}B_{2,3}{}^{-1}\right]', \qquad D_{3,k} = B_{2,3}D_{2,k}, \qquad k = \overline{4,m}$$

Продолжая данный процесс, получим при $j < m-1$ соотношения, играющие роль (19) - (21):

$$z_j^{(j)} = N_{j-1}\left(x,z_j,\dots,z_j^{(j-1)}\right) + \sum_{k=j+1}^{m} D_{j,k}(x) \int\limits_{x_0}^{x} B_{j,k}(t)z_j(t)dt\,, \qquad z_j{}^{(s)}(x_0) = 0, \qquad s = \overline{0, j-1}, \tag{23}$$

где

$$N_{j-1}\left(x,z_j,\dots,z_j^{(j-1)}\right) = \sum_{k=j}^{m} D_{j,k}B_{j-1,k}B_{j-1,j}^{-1}z_j +$$

$$+B_{j-1,m}\left[N_{j-2,0}\left(x,z_j,\dots,z_j^{(j-1)}\right) - \sum_{s=0}^{j-2} C_{j-1}^s\left(B_{j-1,j}^{-1}\right)^{(j-1-s)} z_j^{(s+1)}\right],$$

$$N_{j-2,0}\left(x,z_j,\dots,z_j^{(j-1)}\right) = N_{j-2}\left(x, B_{j-1,j}{}^{-1}z_j', \left(B_{j-1,j}{}^{-1}z_j'\right)', \dots, \left(B_{j-1,j}{}^{-1}z_j'\right)^{(j-2)}\right), \tag{24}$$

$$B_{j,k} = -\left[B_{j-1,k}B_{j-1,j}{}^{-1}\right]', \qquad D_{j,k} = B_{j-1,j}D_{j-1,k}, \qquad k = \overline{j+1,m} \tag{25}$$

При $j = m$ интегральное слагаемое в формуле (1) исчезает, и она превращается в векторно-матричное дифференциальное уравнение m - го порядка с нулевыми данными Коши $z_m{}^{(s)}(x_0) = 0,\ s = \overline{0, m-1}$. Понятно, что для получения этого уравнения следует предполагать выполнение условий

$$detB_{s,s+1} \neq 0, s = \overline{0, m-1}, \tag{26}$$

где левые части вычисляются по формулам типа (22), (25).

Для построения по z_m решения y уравнения (2) нужно воспользоваться цепочкой формул

$$B_{m-1,m}{}^{-1} z'_m = z_{m-1}, B_{m-2,m-1}{}^{-1} z'_{m-1} = z_{m-2}, \dots, B_{1,2}{}^{-1} z'_2 = z_1, B_1{}^{-1} z'_1 = y \tag{27}$$

Из вышеизложенного следует

Лемма. Каждая из двух групп условий:

1) $f, A_k \in C^n[\alpha, \beta], B_k \in C[\alpha, \beta], (k = \overline{1, m}), detA_{s,s+1} \neq 0, s = \overline{0, m-1},\ A_{0,1} = A_1,$

2) $f, A_k \in C[\alpha, \beta], B_k \in C^n[\alpha, \beta], (k = \overline{1, m}), detB_{s,s+1} \neq 0, s = \overline{0, m-1},\ B_{0,1} = B_1$

обеспечивает возможность редукции (2) к определенной задаче Коши для одного из линейных векторно-матричных дифференциальных уравнений m- го порядка.

Из вышеизложенного понятно, что редукцию (2) к задачам Коши для систем дифференциальных уравнений можно еще осуществлять, применяя к каждому из уравнений рассматриваемой системы сначала одно из преобразований **А** и **В**, а затем другое (в любой последовательности). Кроме того, при проведении рассуждений можно менять местами слагаемые в правой части системы (2). Тот факт, что функции из (1) заменяются матрицами, не имеет значения для рассуждений, проводимых по схеме п. 3 статьи [1]. Поэтому в результате получается аналогичная сформулированной в [1, с. 32]

Теорема. Если $f, A_k, B_k \in C^n[\alpha, \beta],\ k = \overline{1, m}$, то могут быть построены $2^m m!$ наборов условий типа (13), (26), каждый из которых обеспечивает редукцию (2) к определенной векторно-матричной задаче Коши для линейного дифференциального уравнения m- го порядка. Интегрирование в квадратурах любого из этих уравнений влечет за собой возможность построения решения уравнения в явном виде.

Литература:

1. Жегалов В. И., Сарварова И. М. Об одном подходе к решению интегральных уравнений Вольтерра с вырожденными ядрами// Изв. вузов. Математика.-2011.-№7.-С. 28-36.
2. Полянин А. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнения. М.: Физматлит, 2003. – 608 с.

Об авторе:

Шакирова Инна Маратовна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», г. Набережные Челны, Россия

About the author:

Inna Shakirova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia

2 СЕКЦИЯ.
ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

УДК 378; 51

Алимурадов Р.Г., Марголина Н.Л., Троскина А.Е., Ширяев К.Е.

Несколько слов о том пространстве, в котором мы живем

Статья содержит анализ понятия математического пространства применительно к пониманию окружающей нас действительности, ее свойств и реалий. Затронуты вопросы Ньютоновского времени, сказано о таком понятии дифференциальной геометрии, как многообразие, вплотную подведено к идее ориентации многообразия. Статью можно отнести к циклу «математика почти без формул».

Ключевые слова: пространство, пространство-время, многообразие, лист Мебиуса

Ruslan G. Alimuradov, Natalia L. Margolina, Alena E. Troskina, Kirill E. Shiryaev

A Few Words About the Space in Which We Live

The article contains an analysis of the concept of mathematical space in relation to understanding the reality around us, its properties and realities. Questions of Newtonian time are touched upon, it is said about such a concept of differential geometry as a manifold, and it is brought close to the idea of the orientation of a manifold. The article can be attributed to the cycle «mathematics with almost no formulas».

Keywords: space, space-time, manifold, Moebius strip

Математика – наука в высшей степени умозрительная. Именно этим объясняется некий парадокс преподавания математических дисциплин – зачастую более сложный, более профессиональный материал излагать проще, чем базовые понятия. Дело в том, что на базовом уровне слушателю необходимо не только усвоить логику манипуляций лектора с математическим аппаратом, но и «переварить», то есть сделать понятными (можно еще сказать – «вообразить себе») использующиеся в этом аппарате фундаментальные понятия, являющиеся чистыми абстракциями. В качестве примера можно привести хотя бы аналитическое определение действительного числа. Несмотря на знакомство с этим понятием со школы, а то и ранее, тем не менее аксиоматика действительных чисел всегда вызывает определенные затруднения даже у студентов-математиков, которых еще в школе приучили к «эпсилон-дельта» символике и кванторам. Что уж говорить о студентах других направлений, которые с этим формализмом не знакомы? Достаточно просто увидеть их остекленевшие взгляды после первой лекции по математическому анализу, традиционно посвящаемой аксиомам действительных чисел. Рискнем предположить, что именно отсутствие наглядности при изложении этих аксиом (плюс, конечно, совершенно незнакомый большинству язык формализма Коши) делает эту тему не самой простой в курсе анализа.

Зато после этого, при некотором прилежании, определение предела последовательности, что называется, «идет на ура». И здесь играют роль несколько факторов. Во-первых, формализм Коши уже не является новым. Во-вторых, понятие предела последовательности очень легко выразить понятным, нематематическим языком – чем больше номер последовательности, тем ближе элемент последовательности к своему пределу. В-третьих, понятие предела достаточно наглядно, стоит только разобрать пример, типа одной n-ой, и обозначить на числовой прямой. И, наконец, в-четвертых, следующие за определением предела доказательства его элементарных свойств помогают освоить определение. Опытный лектор обязательно заметит, что прежде, чем начать доказывать какие-либо свойства предела, необходимо сначала написать его определение, дальнейшими манипуляциями с которым и доказывается искомое свойство. Простота и ясность этих доказательств немало способствуют усвоению понятия предела.

Но как быть в том случае, если на тщательную проработку основных понятий совершенно не хватает времени. Полный хаос при распределении выпускающей кафедрой количества часов, выделяемых на все дисциплины, частенько приводит к «перетягиванию одеяла», возможно, в ряде случаев и допустимого, но в целом приводящего к поверхностности преподавания. Можно много говорить о вреде такого подхода, но реальность, увы, такова, какая она есть. Времени на математические дисциплины (и наверняка на многие другие) катастрофически не хватает.

В связи с этим приходится разрабатывать какие-то приемы, позволяющие дать студентам не специальное, но тем не менее правильное понятие о том или ином математическом термине. Особенно это необходимо для студентов, математика для которых не является профилирующей, и тем не менее входит в программу подготовки специалиста данного профиля. Как правило, математика для таких студентов необходима лишь в узком диапазоне, например лишь многомерная геометрия для студентов, сдающих рисунок, статистика и динамические системы для тех, кто свяжет свою будущую деятельность с туризмом или ресторанным делом. При этом уровень математической подготовки таких студентов, как правило, не очень высок. Приходится адаптировать фундаментальные математические курсы, оставляя лишь самые базовые понятия, необходимые для дальнейшей спецификации.

Достаточно эффективной в этом плане является разработка таких материалов, которую можно условно обозначить, как «математика почти без формул». В самом деле, для студентов, например, гуманитарных направлений, такая форма ведения лекций предпочтительней.

В качестве примера можно привести такое известное понятие, как пространство. Говоря о пространстве, можно не только дать первичное понятие о многообразии, но и проследить внутреннюю логику развития математики.

Как математический термин пространство имеет множество различных значений, в зависимости от структуры, которой это пространство наделено (заметим, что чем проще структура, тем сложнее пространство). Это и самое простое из пространств – евклидово, и нормированное, и метрическое, и даже наиболее сложное, с самой простой структурой – топологическое (см., например, [1], [2], [3]). Несомненно одно – истоком этого понятия было обычное геометрическое трехмерное пространство, аксиоматику которого ввел в античности Евклид. Далее, сравнение планиметрических и стереометрических свойств математических объектов привело к понятию размерности, но в обобщении этого понятия длительное время не было особой нужды.

Действительно, геометрия Евклида была столь исчерпывающей, что ни у средневековых математиков, ни у математиков эпохи просвещения даже не возникало сомнений в существовании Универсума – трехмерной вселенной, время для которой является лишь параметром изменения. Только в связи с исследованиями Лобачевского возникли сомнения, а столь ли уж верно представление человечества о строении пространства. Это привело к актуальности, в общем теоретических построений различных структур, приводивших к пространствам различного вида.

Возникает естественный вопрос – почему понятие предела так важно при выборе пространства? Не последнюю роль в этом имел тот факт, что внутренняя структура самого пространства (не путать с аксиоматической структурой), так сказать, наличие в пространстве «дырок», самым непосредственным образом связано с понятием предела. Более того, даже среди обычных чисел (в числовом пространстве) этот вопрос имел базовое значение. Строгое доказательство существования такого числа, как «пи», или «е» – основания натурального логарифма связано именно с предельным переходом, поскольку ни то, ни другое число не могут быть точно вычислены, а значит могут быть представлены только как существующий предел последовательности собственных приближений. Если считать эти числа реально существующими на числовой прямой, значит, она не имеет «дырок». В аксиоматике действительных чисел это свойство отражено, и этот факт делает действительную прямую топологическим пространством.

С середины XIX века физиков перестала устраивать принятая Ньютоном картина пространства-времени. Понятно, что построения различных пространств стали использоваться гораздо шире при описании различных физических реалий. Наконец, пространство-время Эйнштейна полностью перевернули «бытовое» понятие вселенной.

Впрочем, даже сегодня многие не понимают, как Вселенная может быть (возможно) ограниченной. Можно провести такую аналогию. Изначально Земля также казалась человеку бесконечной. Отказавшись от этой гипотезы, человечество занялось поиском «края Земли». Не найдя последнего, ученые выдвинули гипотезу о шарообразности нашей планеты. Таким образом, изначально воспринимаемая как бесконечная, Земля оказалась лишь шариком в бесконечном трех, а ныне и в большей размерности пространстве.

И здесь необходимо упомянуть еще об одном важном, связанном с подмножествами пространства, понятии – о многообразии. Определение многообразия достаточно сложно, поэтому не приводится здесь, но в двух словах, многообразие – это обобщение понятия кривой или поверхности в пространстве произвольной размерности. И как обитаемая поверхность Земли наглядно и понятно представляется маленькой заселенной сферой в бесконечном (и абсолютно абстрактном) трехмерном пространстве, совершенно аналогично наше пространство-время может оказаться лишь четырехмерным многообразием (и, возможно, многообразием ограниченным) в объемлющем и тоже абстрактном пространстве неизвестной размерности.

Скептики заметят, что для чувств достаточно и трехмерного пространства, а потому никаких многообразий им не надо. Но ведь и Земля кажется плоской, а то, что это поверхность сферы можно понять лишь оперируя большими расстояниями (вспомним линию горизонта и уходящий за него корабль). Возможно, и наши органы чувств не воспринимают нашу привычную трехмерную среду обитания ввиду огромных расстояний того объемлющего пространства, в которое вложено наше многообразие.

При этом свойства многообразий могут быть самыми удивительными. Например, известно, что замкнутая кривая на плоскости (одномерное многообразие в двумерном пространстве) делит последнюю на две непересекающиеся части – внешность и внутренность. Тот же эффект характерен и для сферы (двумерное многообразие в трехмерном пространстве) – она также делит пространство на свою внутренность (шар) и внешность. При этом, если, находясь на внешней поверхности, человек совершит путешествие, возвратясь в исходную точку, то он, очевидно, все равно останется на внешней поверхности сферы. Однако этот факт справедлив далеко не для всех двумерных многообразий. Так, например, находящийся на поверхности построенного Мебиусом многообразия (лист Мебиуса) человек, совершающий описанное выше путешествие, рискует оказаться в той же самой точке листа Мебиуса, но с другой стороны поверхности. То есть про лист Мебиуса нельзя сказать, что он делит пространство на внешность и внутренность.

Подобного рода открытия доказывали, что математика может описать такие реальности, какие и не снились ученым, занимающимися физикой, химией и другими естественными науками. С другой стороны, все более и более абстрактные результаты находят использование как необходимый для описания реальности аппарат. Например, абсолютно не применяемые нигде до середины XX века алгебры Ли нашли свое место при описании элементарных частиц.

Резюмируем главное. На примере понятия пространства мы проследили, из чего оно зародилось, как развивалось и обобщалось. Можно заметить, что развитие это происходило по внутренней логике самой математики – решения поставленных задач ставили очередные задачи, которые требовали обобщений и т. д. В то же время нельзя не заметить, что развитие понятия пространства в целом коррелировало с развитием естественных наук, иногда сильно опережая другие науки, а иногда несколько запаздывая. Объяснить это можно как «духом времени» (которому математики хоть и подвержены, но в меньшей степени, чем, скажем, физики), так и собственно математическими проблемами, иногда выходящими на первый план и заставляющими математиков «вариться в собственном соку». Впрочем, вероятно, это характерно и для любой настоящей науки.

Литература:

1. Алимурадов Р. Г., Троскина А. Е., Ширяев К. Е. Метрическое пространство, или как измерить расстояние от Москвы до Кейптауна / Р. Г. Алимурадов, А. Е. Троскина, К. Е. Ширяев // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин: материалы XIV Всероссийской научно-методической конференции. – Кострома: КГУ, 2021.
2. Алимурадов Р. Г., Троскина А. Е., Ширяев К. Е. Нормированные пространства: может ли круг быть квадратом / Р. Г. Алимурадов, А. Е. Троскина, К. Е. Ширяев // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин: материалы XIV Всероссийской научно-методической конференции. – Кострома: КГУ, 2021.
3. Алимурадов Р. Г., Троскина А. Е., Ширяев К. Е. Топологическое пространство как структура, допускающая предельный переход / Р. Г. Алимурадов, А. Е. Троскина, К. Е. Ширяев // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин: материалы XIV Всероссийской научно-методической конференции. – Кострома: КГУ, 2021.

Об авторах:

Алимурадов Руслан Гаджимурадович, аспирант, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, metaon1@yandex.ru

Марголина Наталия Львовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, nmargolina@mail.ru

Троскина Алена Евгеньевна, аспирант, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, troskina96@mail.ru

Ширяев Кирилл Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, shiryaev4@yandex.ru

About the authors:

Ruslan G. Alimuradov, post-graduate student, Kostroma State University, Kostroma, Russia, metaon1@yandex.ru

Natalia L. Margolina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Kostroma State University, Kostroma, Russia, nmargolina@mail.ru

Alena E. Troskina, post-graduate student, Kostroma State University, Kostroma, Russia, troskina96@mail.ru

Kirill E. Shiryaev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Kostroma State University, Kostroma, Russia, shiryaev4@yandex.ru

УДК 372.851:378.147 Антропова Г.Р., Матвеев С.Н., Шакиров Р.Г.

Компьютерная поддержка в решении геометрических задач в курсе геометрии

Информационные технологии в обучении геометрии это, прежде всего специальные способы и технические средства для работы с геометрической информацией. Здесь на основе конкретных примеров рассматриваются в рамках этой технологии вопросы компьютерной поддержки геометрических задач. Внимание заостряется на возможности применения такой поддержки в самостоятельной работе обучающихся, проверки производимых математических вычислений, а также возможности геймификации компьютерных моделей геометрических фигур. При этом можно выделить следующие преимущества таких моделей, по сравнению с традиционными моделями: быстрое создание большого количества разных необходимых моделей, неоднократное воспроизведение построенной модели, быстрое копирование и распространение построенных моделей, возможность изменения характеристик построенных моделей.

Демонстрируется, как методы компьютерной графики и аппарат геометрии могут быть использованы при решении задач, сформулированных в рамках ИКТ.

Ключевые слова: информационные технологии обучения, изображение фигуры, 3D моделирование, параметр, кривизна кривой, эволюта, площадь фигуры

Gyuzel R. Antropova, Semen N. Matveev, Rafis G. Shakirov

Computer Support in Solving Geometric Problems in the Course of Higher And Elementary Geometry

Information technology in teaching geometry is, first of all, special methods and technical means for working with geometric information. Here, on the basis of concrete examples, questions of computer support of geometric problems are considered within the framework of this technology. Emphasis is placed on the possibility of using such support in the independent work of students, verification of mathematical calculations, as well as the possibility of gamification of computer models of geometric shapes. At the same time, the following advantages of such models can be distinguished in comparison with traditional models: the rapid creation of a large number of different necessary models, the repeated reproduction of the constructed model, the rapid copying and distribution of the constructed models, the ability to change the characteristics of the constructed models.

It is demonstrated how the methods and apparatus of geometry can be used in solving problems formulated in the framework of computer science and computer graphics.

Keywords: Information technology education, image of a figure, 3D modeling, parameter, curvature of a curve, evolute, area of a figure

Технология решения задач с применением геометрического инструментария и возможностей современных компьютерных систем – основа современной геометрической подготовки выпускника педагогического вуза.

Рассмотрим соприкосновение разделов курсов геометрии и ИКТ. Проиллюстрировать это возможно с помощью решения математических задач в фокусе информатизации образования. Так построить динамическое изображение плоского сечения фигуры можно в системе моделирования Rhinoceros 3D (https://www.rhino3d.com/). Подобная работа проводится на базе Набережночелнинского государственного педагогического университета в рамках проекта «Решение задач конструктивной геометрии с использованием программ параметрического моделирования», реализуется в направлении подготовки 44.03.05 Педагогическое образование. В проекте, о котором мы рассказывали в ранних статьях, используется лицензионный программный продукт. Далее продемонстрируем некоторые способы применения этой системы и других общедоступных программных продуктов, а также их принципиальные возможности в реализации обучения решению некоторых геометрических задач.

Rhinoceros. Возможности конструирования математической составляющей обучающих тренажеров через реализацию решения учебно-математических и исследовательских задач на основе профессиональной системы моделирования Rhinoceros. Реализация этого программного продукта, как и некоторых других, позволяет раскрыть основные разделы метода изображения и некоторых смежных дисциплин, в частности ИКТ. Система позволяет во многом автоматизировать процесс создания геометрических чертежей, компактно их хранить и многократно использовать, а в случае необходимости вносить в имеющийся готовый чертеж необходимые коррективы. Применение на уроках геометрии проектора и интерактивной доски позволяет максимально эффективно расходовать время урока. Целесообразно, например, используя готовые чертежи к стереометрическим задачам, выполненным заранее, анализировать необходимость выполнения на чертеже дополнительных построений, построение сечений, требующихся для решения задачи и другие моменты. Интерактивная доска и возможность построения трехмерной модели позволяет не только исследовать задания, но выполнять дополнительные построения, а затем сохранять полученные чертежи для последующего использования. Замечательно и то, что эти же задачи могут быть предложены в обучении разделов 3D моделирования. Например, Rhino 6 для Windows включает полностью интегрированную версию популярной среды визуального программирования Grasshopper. Это визуальный редактор программирования, который интегрирован в инструменты моделирования Rhinoceros 3D. При помощи простых блок-схем можно создавать сложнейшие модели, а также писать программы, помогающие автоматизировать различные процессы.

В качестве примера рассмотрим решение позиционной задачи в системе Rhinoceros (Rhino): построить сечение куба плоскостью *MNP*, если $M \in [AA_1]$, $N \in [B_1C_1]$, $P \in [AB]$. (рис. 1).

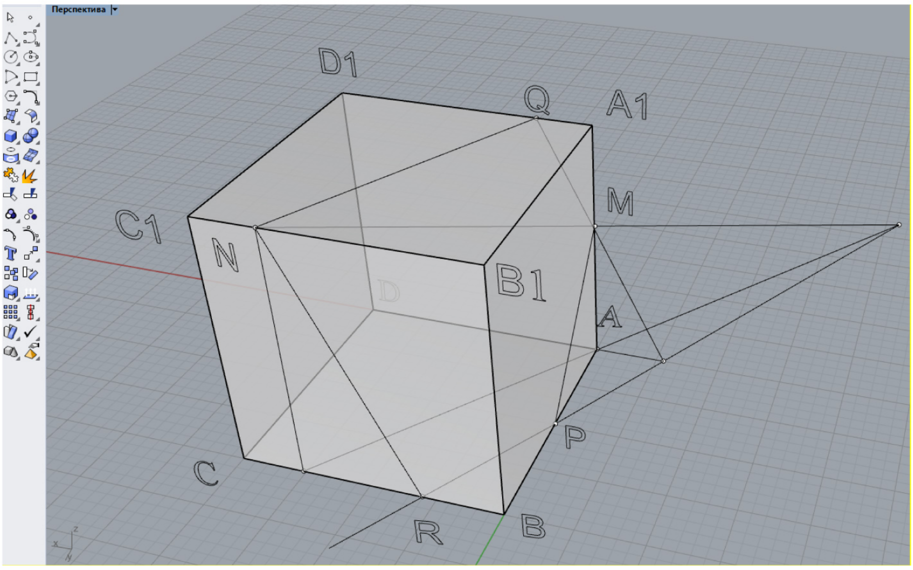

Рисунок 1 – Решение методом следов

Rhinoceros позволяет показать динамику чертежа и геймифицировать его, при этом параметрическая модель к одной задаче может быть привлечена к решению другой позиционной задачи. Эти функции и инструменты 3D моделирования позволяют реализовать элементарные тренажеры методов изображения и обучения решению позиционных задач в различных разделах геометрии. Следует также отметить, что Grasshopper, встроенный в Rhino 3D, позволяет автоматизировать поиск форм и проверить модель на ошибки. С помощью интерактивных моделей можно иллюстрировать геометрические понятия и доказательства теорем (рис.2).

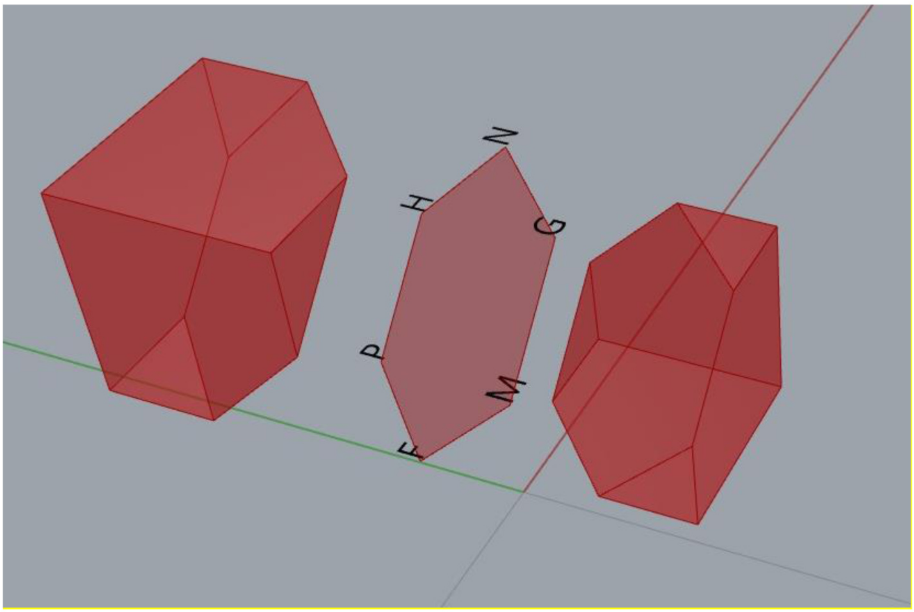

Рисунок 2 – Интерактивная модель

Широкие возможности Rhinoceros является компьютерной поддержкой в решении широкого класса геометрических задач. Наглядность объектов стереометрических задач из курса геометрии можно использовать на занятиях курса 3D моделирования. Предложенная конструктивная модель решения позиционных задач с применением средств 3D моделирования позволит формировать у будущих педагогов широкий ряд компетенций и может рассматриваться как инструментарий ИКТ в сфере образования.

Приведем так же примеры компьютерной поддержки решения математических задач на основе некоторых систем компьютерных алгебр.

The Gejmeter's Sketchpad. Рассмотрим применение этой системы в решении задач с параметрами, предлагаемым как на едином государственном экзамене (ЕГЭ), так и на дополнительных конкурсных экзаменах в вузы и вызывают особенные затруднения у учащихся.

Задача: Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{\sqrt{a+1}-2\cos 3x+1}{\sin^2 3x+a+2\sqrt{a+1}+2}$ содержит отрезок [2;3].

Обращение к динамической системе моделирования предполагает поэтапное построение модели. Возможности анимации параметра могут быть применены не только к решению систем графическим способом, но и ко многим типам задач с параметрами, например, к задачам, где требуется (аналитическое решение) исследование функции с целью выявления ее элементарных свойств.

Анимация параметра позволяет наглядно продемонстрировать искомое значение параметра: условие $a = -1$ равносильно условию тому, что $y(x) = 3$.

GeoGebra. В практике изучения и преподавания геометрии общего среднего образования наиболее широко распространены The Geometer's Sketchpad и GeoGebra. Сравнение этих двух программ показывает, что возможности GeoGebra шире. Например, в отличие от GeoGebra система The Geometer's Sketchpad не предусматривает построение графика параметрически заданной функции. GeoGebra предлагает более удачное компьютерное сопровождение математических задач. Приведем пример из курса дифференциальной геометрии: построение эволюты некоторой кривой

$$\gamma: \vec{r} = \vec{r}(t),$$

где $\vec{r}(t)$ – вектор-функция с координатами $x(t), y(t), z(t)$. Эволюту $\tilde{\gamma}$ рассматриваем как ребро возврата развертывающейся поверхности, имеющей данную кривую γ своей ортогональной траекторией. Эволют $\tilde{\gamma}$ будет множество, так как уравнение горловой линии $\tilde{\gamma}$, совпадающей в нашем случае с ребром возврата развертывающейся поверхности, определяется уравнением:

$$\tilde{\gamma}: \vec{\tilde{r}}(t) = \vec{r}(t) + \rho \cdot \vec{v} + \rho \cdot tg\,\varphi \cdot \vec{\beta},$$

где $\varphi = \int \chi(s)ds$ включает произвольное постоянное слагаемое, $\chi(s) -$ кручение γ. Величина ρ, обратная кривизне k линии γ, называется радиусом кривизны этой линии в рассматриваемой точке и выражается формулой:

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{|\vec{r'}(t)|^3}{|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)|},$$

$\vec{v}$ – единичный вектор главной нормали, $\vec{\beta}$ – единичный вектор бинормали.

Например, для линии $x = a(t - sint); y = a(1 - cost);\ z = 4acos(\frac{t}{2})$ при $a = \frac{1}{8}$ эволюта, построенная в Geo Gebra, имеет вид (рис.3):

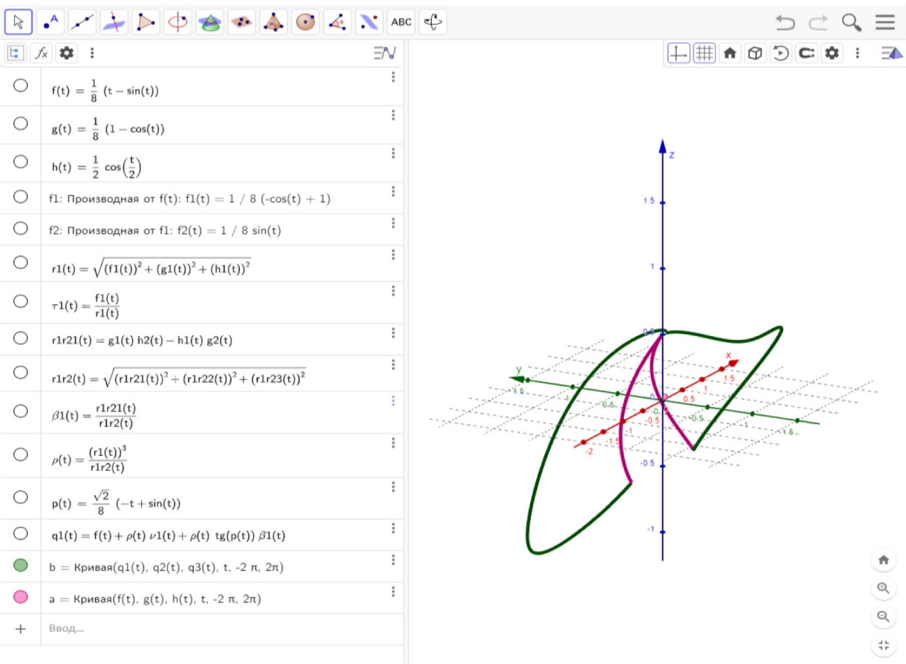

Рисунок 3 – Пример реализации эволюты в GeoGebra

Реализация команд универсальна: они позволяют производить построение эволюты многих других пространственных кривых. Таким образом, программа «GeoGebra», позволяет визуализировать многие геометрические места точек пространства и плоскости и может служить основой тренажера. Однако, GeoGebra не позволяет реализовать достаточно широкий класс математических задач, здесь, например, могут возникнуть затруднения при вычислении интеграла $\varphi = \int \chi(s)ds$. В этом случае, можно воспользоваться альтернативными программами, например, Maple.

Maple. Рассмотрим пример реализации тренажера по вычислению площадей в модели Пуанкаре. Содержание тренажера:

а) требуется вычислить площадь многоугольника по дефекту,

б) требуется вычислить площадь многоугольника по метрике;

в) требуется вычислить площадь многоугольника, используя систему компьютерной алгебры Maple.

Пример реализации: требуется вычислить площадь треугольника, стороны которого определяются уравнениями:

$\gamma_1: x = 0,\ \gamma_2: 2x - a = 0\ , \gamma_3: x^2 + y^2 - a^2 = 0.$

Известно, что элемент площади на модели Пуанкаре определяется $ds = r^2 \frac{dx \times dy}{y^2}$, можно считать *r =1*. Тогда площадь фигуры *G* вычисляется по формуле:

$$S = \iint\limits_G \frac{dx\ \times dy}{y^2}$$

Для успешной реализации этой задачи в рамках тренажера рекомендуется первоначально рассмотреть площади элементарных фигур – треугольников. Здесь вычисления ведутся в системе компьютерной алгебры Maple. Выгодно при этом обосновать, что площади треугольников определяются соответствующим дефектом $\delta = \pi - \alpha - \beta - \gamma$, где $\sigma_{\text{ABC}} = \alpha + \beta + \gamma$ – сумма внутренних углов треугольника. Тогда площадь искомого многоугольника определяется дефектом: $S = (n-2)\pi - \sigma_{ABCDE}$, здесь $n = 3$.

а) совершив необходимые вычисления, можно получить:

$$S = \pi - \alpha - \beta - \gamma = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

б) решение в кратных интегралах позволяет задействовать аппарат математического анализа:

$$S_1 = \iint\limits_G \frac{dxdy}{y^2} = \int\limits_a^{a/2} dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} \frac{dy}{y^2} = \frac{\pi}{6} - arcsin\left(\frac{a}{2b}\right),$$

$S = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{\pi}{6} - arcsin\left(\frac{a}{2b}\right)\right) = \frac{\pi}{6} - arcsin(\lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$

в) реализация в Maple (рис. 4).

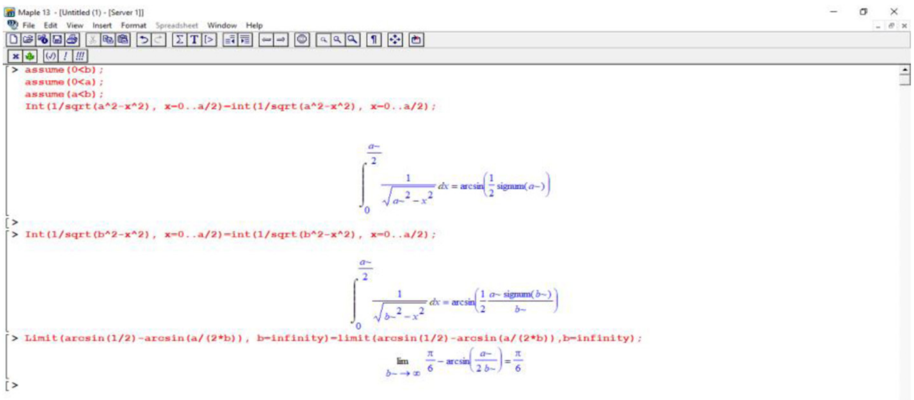

Рисунок 4 – Реализация вычисления площади треугольника в Maple

Современные математические пакеты разнообразны и доступны широкому кругу пользователей, в том числе и преподавателям. К тому же многие из них сравнительно удобны в применении в учебном процессе и позволяют решать задачи максимально приближенно к традиционному способу. Остается вопрос выбора программных пакетов. Наиболее перспективным является выбор свободно распространяемого программного обеспечения (ПО), т.к. его использование для учебного процесса привлекательнее по сравнению с коммерческим. Прежде всего, потому что модель, которая используется в свободно распространяемом ПО, это модель открытости и общедоступности всех наработок.

На наш взгляд, использование подобных программных продуктов и рассмотренных примеров принесет пользу не только студентам педагогических вузов, но и преподавателям математики.

Литература:

1. Matveev S., Antropova G., Chernova N., Key factor analysis influencing the learning activity motivation with first-year and second-year university students//13th international technology, education and development conference (INTED2019). – 2019. – Vol., Is.. – P.1757-1762.
2. Антропова Г. Р. О некоторых конструктивных задачах дифференциальной геометрии средствами компьютерной алгебры//Г. Р. Антропова, С. Н. Матвеев, Р. Г. Шакиров/IX Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии. Автоматизация. Актуализация и решение проблем подготовки высококвалифицированных кадров (ИТАП-2020)», 2020 г.: сборник трудов / ред. кол. Симонова Л.А., Савицкий С.К – Набережные Челны: Изд-во Набережночелнинский институт (филиал) ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», 2020. – с.320-325. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43322903.
3. Антропова Г. Р. О некоторых способах построения поля Галуа и проективных пространств / Антропова Г. Р., Матвеев С. Н., Шакиров Р. Г. // ВЕСТНИК Набережночелнинского государственного педагогического университета. – 2020. – №4(29). – С.27-29.
4. Антропова Г. Р., Матвеев С. Н. Организация спецкурса по геометрии средствами информационных технологий (в подготовке бакалавров)//Мир науки. – 2017. – Т.5.№2. – URL: http://mir-nauki.com/PDF/33PDMN217.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.
5. Антропова Г. Р., Матвеев С. Н., Шакиров Р. Г. Реализация некоторых задач дифференциальной геометрии в программе Geo Gebra // Высшее образование сегодня. – 2020. – №6. – С.59-63. – URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_42840120_88091866.pdf.
6. Галиакберова А. А, Галямова Э. Х., Матвеев С. Н. Методические основы проектирования цифрового симулятора педагогической деятельности // Вестник Мининского университета. – 2020. – Т.8.N3.
7. Матвеев С. Н., Антропова Г. Р. Организация спецкурса по геометрии средствами информационных технологий (в подготовке бакалавров) // Мир науки. – 2017. – Том 5, №2. – URL: http://mir-nauki.com/PDF/33PDMN217.pdf.
8. Матвеев С. Н., Сиразов Ф. С. Использование системы компьютерной алгебры Maxima в изучении конечных проективных прямых // Высшее образование сегодня. – 2015. – №2.– С. 72-75.
9. Проективная геометрия: учебно-методическое пособие для самостоятельной работы обучающихся очной, заочной и дистанционной форм обучения по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование/ Г. Р. Антропова, С. Н. Матвеев, Р. Г. Шакиров. – Набережные Челны: Изд-во: НГПУ. – 2021. – 75 с.

Об авторах:

Антропова Гюзель Равильевна, кандидат педагогических наук, Набережночелнинский институт Казанского федерального университета, г. Набережные Челны, Россия

Матвеев Семен Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», г. Набережные Челны, Россия

Шакиров Рафис Гильмегаянович, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», г. Набережные Челны, Россия

About the authors:

Guzel R. Antropova, Candidate of Pedagogical Sciences, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan Federal University, Naberezhnye Chelny, Russia

Semyon N. Matveev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia

Rafis G. Shakirov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia

УДК 378; 51

Бабенко А.С., Марголина Н.Л., Троскина А.Е., Ширяев К.Е.

Сопряженные пространства. Пространство обобщенных функций

В работе рассматривается понятие сопряженного пространства. Оказывается, пространство, сопряженное конечномерному евклидову, изоморфно ему, то есть обладает одинаковой структурой. Совсем другая ситуация с бесконечномерными функциональными пространствами. В статье дано определение обобщенных функций и их классификация. Статью можно отнести к циклу «математика почти без формул».

Ключевые слова: линейная функция, ковектор, дельта-функция Дирака, сингулярные и регулярные обобщенные функции

Alena S. Babenko, Natalia L. Margolina,
Alena E. Troskina, Kirill E. Shiryaev

Connected Spaces. Space of Generalized Functions

The paper considers the concept of a dual space. It turns out that the dual space of a finite-dimensional Euclidean is isomorphic to it, that is, it has the same structure. The situation is completely different with infinite-dimensional function spaces. The article provides a definition of generalized functions and their classification. The article can be attributed to the cycle "mathematics with almost no formulas".

Keywords: Linear function, covector, Dirac delta function, singular and regular generalized functions

Когда речь заходит о математике, многие часто жалуются на совершенно особую, непонятную другим терминологию. Пожалуй, это в некоторой степени объяснимо столкновением с математическими терминами еще в школе, т.е. на раннем этапе обучения. Как бы то ни было, преодоление именно этой сложности, оборачивается со временем выгодным преимуществом, поскольку именно терминология (или, обобщая, попросту математический язык) наиболее естественна и удобна для дальнейших исследований. В конце концов, никого не смущает, что для овладения иностранным языком приходится зазубривать некое количество слов и правил, только после этого язык становится «рабочим» и на нем можно не только свободно говорить, но и (что важнее) мыслить. С математическим языком то же самое – чтобы успешно мыслить на нем, необходимо овладеть некими базовыми словами и правилами.

К сожалению, как и в живом языке, в математической терминологии не всегда все «математически» строго и логично, что зачастую приводит к некому «конфузу». Можно привести пример с не самым удачным школьным термином, касающимся линейной функции, не обладающей на самом деле свойством линейности (см. [4]). Да и вообще, вопросы терминологии – штука тонкая, недаром еще в III – IV веках византийские богословы столь тщательно оттачивали свои понятия.

Но оставим богословие и перенесемся в век XVIII, в век беспредельной веры в науку и отрицания любых чудес. Именно тогда один из французских ученых отрицал возможность метеоритов, ибо «камни с неба падать не могут, сие антинаучно». Не последнюю роль в такой слепой вере в науку и отрицание всего, еще наукой не объясненного, возможно, сыграла… линейная алгебра. В самом деле, рассмотрение конечномерных линейных пространств, в которых любой элемент раскладывается по базису и, таким образом, однозначно характеризуется собственными координатами, не могло не вызвать ассоциации со знанием вообще. И, значит, необходимо найти такую систему постулатов, по которой можно разложить любое утверждение. Стоит добавить к этому преобладание атомизма (атом – основа основ) и доказательство теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения (вкратце – зная само уравнение изменения положения объекта и начальное положение этого объекта можно точно предсказать будущее положение). Таким образом, лишь техническое несовершенство математического аппарата мешает узнать все!

При этом как-то ни у кого (даже у Ньютона) не возникало сомнений, что пространство – это то самое привычное трехмерное пространство, в котором мы столь благополучно обитаем, а время – лишь некий параметр изменения этого пространства. И только в связи с развитием математической мысли, связанной с термином «пространство» стало возможным задаться вопросом – а так ли это на самом деле. В результате стало возможным создать квантовую механику, теорию относительности и массу других интересных теорий. Одной из них стала теория обобщенных функций.

Термин «обобщенная функция», хотя и традиционен, но, на взгляд авторов статьи, не особенно хорош в преподавании. Студент частенько путает (или просто не понимает) разницу между просто функцией (просто элементом функционального пространства) и обобщенной функцией (функционалом, или, иными словами, воздействием на произвольную функцию). Это создает известные трудности. В то же время закономерность такого термина становится ясной из сравнения сопряженных пространств для конечномерного евклидова и бесконечномерного функционального. Такое сравнение помогает и осознанию разницы между регулярными и сингулярными обобщенными функциями.

Как известно, пространства, называемые евклидовыми, наделены скалярным произведением, а значит и всем, что из этого следует – нормой, метрикой, сходимостью и т. д. (см, например, [1], [2], [3]). Заметим также, что скалярное произведение необходимо требует линейности пространства, то есть операций сложения и умножения на число. И так как скалярное произведение является операцией линейной, то естественно возник вопрос и об обобщении понятия линейности, если не для бинарной, то хотя бы для унитарной операции. Так появилось понятие линейной функции, приведшее к весьма интересным результатам.

Линейной функцией называется отображение линейного пространства на множество действительных чисел, то есть каждому вектору соответствует число, называемое образом этого вектора. При этом само отображение должно обладать линейностью, то есть образ суммы векторов должен быть равен сумме образов, а образ вектора, умноженного на число – произведению этого же числа на образ вектора. Иными словами, сложение и умножение можно «выносить за знак» линейной функции.

Над линейными функциями тоже возможны операции сложения и умножения на число. В самом деле, и сумма функций, и произведение функции на число не нарушают линейности отображения, и, значит в результате этих операций опять получится линейная функция. Поэтому множество всех линейных функций сами образуют линейное пространство.

Это пространство называется сопряженным. Таким образом, по определению сопряженным данному пространством называется пространство всех линейных функций, определенных на данном. Возникает совершенно естественный вопрос, а как связаны между собой исходное и сопряженное пространства?

Естественно, исследование ответа на этот вопрос началось с рассмотрения обычного конечномерного Евклидова пространства, причем, как выяснилось, особого значения размерность не имела, результаты были одинаковы и для плоскости, и для абстрактных пространств размерности более третьей. Так, выяснилось, что любая линейная функция на n-мерном пространстве задается с помощью фиксированного набора из n чисел, то есть тоже n-мерным вектором. Более того, каждый конкретный вектор также автоматически задает линейную функцию, причем значение этой функции на произвольном векторе пространства вычисляется как скалярное произведение этого произвольного вектора с нашим конкретным. Иными словами, линейных функций ровно столько же, сколько и векторов, и их так же можно раскладывать по базисам. Или, как говорят математики, сопряженное пространство оказалось изоморфным (взаимно однозначно сопоставимым) данному.

А теперь попытаемся осмыслить полученное. Имеется некоторое особым образом устроенное множество (линейное пространство). Имеется множество особым образом устроенных отображений этого пространства (сопряженное пространство). И получается, что возможные отображения напрямую зависят от прообразов. Не от нас, посторонних наблюдателей, а от совокупности самих прообразов. Разумеется, в нашей воле остается выбор прообраза, а вот результат… Как говорится, выше головы не прыгнуть. И при этом какая гармония в двойственности прямого и сопряженного пространств. И сразу ясно, что пространство, сопряженное к сопряженному (дважды сопряженное) окажется опять точно таким же и будет совпадать с искомым. Красота этого результата нашла свое выражение и в термине «ковектор» – так стали называть элемент сопряженного пространства, и в создании столь необходимой в XIX веке для гидро- и аэромеханики теории тензоров – полилинейных функций, зависящих от фиксированного числа векторов и фиксированного числа ковекторов (эти числа называются валентностью тензора). Тензорное исчисление оказалось впоследствии очень полезным и в теории поля.

Увы, идиллия подобной гармонии длилась недолго. Рассмотрение пространства, сопряженного к пространствам функциональным, выявило далеко не столь радостную картину. Во-первых, оказалось, что далеко не каждое линейное отображение такого пространства на множество действительных чисел (линейные отображения такого рода носят традиционно название линейных функционалов) может быть задано скалярным произведением с какой-нибудь функцией. И пример до смешного прост – значение функции в какой-нибудь фиксированной точке, например, в нуле. Такая функция называется «дельта-функцией» Дирака, она была введена этим ученым для описания неких физических результатов.

Таким образом, для общей теории сопряженных пространств тезис об изоморфности их заданному оказался неверным. Но возникший в процессе доказательств математический аппарат оказался крайне востребованным в теории относительности, квантовой механике, физике атома. Ввиду важности полученных результатов была даже разработана специальная терминология. Так, линейные функционалы над некоторыми важными функциональными пространствами стали называть обобщенными функциями, причем те из них, которые можно было задать с помощью скалярного произведения, назвали регулярными, а прочие (например, дельта-функцию) – сингулярными.

Актуальность этих событий можно с некоторой вероятностью объяснить тем, что аппарат классической механики Ньютона перестал удовлетворять ученых, в первую очередь физиков. Исследования атомов показали, что представления об атоме как о материальной точке, изменяющейся в пространстве с течением времени, больше не могли служить надежной научной основой для дальнейших изысканий и в этой, и во многих других областях. Более интересным стал вопрос, не из чего все устроено, а скорее, каким образом, части целого взаимодействуют между собой. А когда речь идет о взаимодействии, понятие функции всегда рядом. Если же учесть, что удобнее всего оказалось описывать элементарные частицы с помощью волновых функций, то понятие обобщенной функции оказалось, как нельзя более кстати для описания воздействия на ядра, протоны, электроны и т. п. Таким образом, математика в очередной раз отреагировала на вызовы современности. Наряду с прочими науками она все больше и больше интересовалась не самими (пусть идеальными) объектами, а связями между ними.

Литература:

1. Алимурадов Р.Г., Троскина А.Е., Ширяев К.Е. Метрическое пространство, или как измерить расстояние от Москвы до Кейптауна / Р.Г. Алимурадов, А.Е. Троскина, К.Е. Ширяев // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин: материалы XIV Всероссийской научно-методической конференции. – Кострома: КГУ, 2021.
2. Алимурадов Р.Г., Троскина А.Е., Ширяев К.Е. Нормированные пространства: может ли круг быть квадратом / Р.Г. Алимурадов, А.Е. Троскина, К.Е. Ширяев // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин: материалы XIV Всероссийской научно-методической конференции. – Кострома: КГУ, 2021.
3. Алимурадов Р.Г., Троскина А.Е., Ширяев К.Е. Топологическое пространство как структура, допускающая предельный переход / Р.Г. Алимурадов, А.Е. Троскина, К.Е. Ширяев // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин: материалы XIV Всероссийской научно-методической конференции. – Кострома: КГУ, 2021.
4. Бабенко А.С., Смирнова Е.С., Троскина А.Е., Ширяев К. Е. О линейных функциях и связанных с ними противоречиях. Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2018. Т. 24. № 2. С. 145–149.

Об авторах:

Бабенко Алена Сергеевна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, alenbabenko@yandex.ru

Марголина Наталия Львовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, nmargolina@mail.ru

Троскина Алена Евгеньевна, аспирант, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, troskina96@mail.ru

Ширяев Кирилл Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, shiryaev4@yandex.ru

About the authors:

Alena S. Babenko, candidate of pedagogical sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Kostroma State University, Kostroma, Russia, alenbabenko@yandex.ru

Natalia L. Margolina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Kostroma State University, Kostroma, Russia, nmargolina@mail.ru

Alena E. Troskina, post-graduate student, Kostroma State University, Kostroma, Russia, troskina96@mail.ru

Kirill E. Shiryaev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Kostroma State University, Kostroma, Russia, shiryaev4@yandex.ru

УДК 378; 51 Бабенко А.С., Задворнова А.С., Марголина Н.Л., Матыцина Т.Н.

О математике, искусстве и интуиции: задачи на предикаты в школьном курсе математики

В статье рассмотрен один из оригинальных методов решения школьных задач математической логики по теме «Теория предикатов». Оказывается, решение становится интуитивно понятнее, если предпринять определенную раскраску логических операций. Также разобраны примеры решения подобных задач.

Ключевые слова: математическая логика, теория предикатов, цвет, интуиция

Alena S. Babenko, Alisa S. Zadvornova,
Natalia L. Margolina, Tatiana N. Matytsina

About Math, Art and Intuition: Predicate Problems in a School Math Course

Abstract: The article discusses one of the original methods for solving school problems of mathematical logic on the topic "Theory of predicates". It turns out that the solution becomes more intuitive if you take a certain coloring of the logical operations. Also discussed are examples of solving similar problems.

Keywords: mathematical logic, predicate theory, color, intuition

Математика – наука крайне полезная. Хотим мы того или нет, но наиболее эффективным аппаратом описания реальности оказывается именно математический. В то же время при обращении к истории можно найти много взаимосвязей математики и музыки, живописи, и, конечно, философии. Так что исторически, математика, так сказать, ближе к искусству (об этом см., напр., [2]).

Ниже приведен довольно остроумный пример использования цвета при решении задач математической логики, традиционно считающейся одной из самых сложных областей математики. Конечно, приведенные здесь задачи лишь задача школьного курса, но тем интереснее такая методика.

В связи с переходом на ФГОС СОО (о связанном с этим проблемах подробнее см. в [1], [3]) в школьном курсе для классов с углубленным изучением математики добавляется ряд тем из курса высшей алгебры, одной из которых является тема «Предикаты». Поэтому возникает необходимость разработки методических рекомендаций по изучению данной темы в школьном курсе математики.

При изучении математики в школе на базовом уровне тема «Предикаты» в 10–11 классах отсутствует, но на углубленном уровне знание элементов математической логики является предметным образовательным результатом. В некоторых учебниках этому разделу посвящена целая глава. Она называется «Повторение и расширение сведений о множествах, математической логике и функциях». В ней рассматриваются различные понятия, связанные с множествами, с высказываниями и действиями над ними. Подробней остановимся на интересующем нас параграфе, который называется «Предикаты. Операции над предикатами. Виды теорем». В нём изложены все основные определения, такие как «предикат», «область истинности предиката», «область определения предиката», «тождественно истинный предикат», «тождественно ложный предикат», «равносильных предикатов», «конъюнкции предикатов», «дизъюнкции предикатов», «импликации предикатов», «эквивалентности предикатов», «отрицания предикатов». А также вводятся кванторы всеобщности и существования. Более того вводятся виды теорем, таких как прямая, обратная, противоположная, противоположная обратной теоремы. При этом отметим, что авторы учебников все определения поясняют конкретными примерами, что позволяет обучающемуся осмыслить содержание и так довольно сложных и абстрактных математических понятий.

Тема «Предикаты» может вызвать затруднения в освоении, если не подойти к изложению материала должным образом. Ранее ребята уже встречались с понятием «множество» и элементами математической логики в школьном курсе математики основной школы, но достаточно поверхностно. Теперь школьникам предстоит расширить свои знания в этой области и рассмотреть вместе с учителем понятие «предиката», операции над предикатами, при этом особенно важно обратить внимание на представление теоретической части материала. Надо доступно изложить определения каждой операции и пояснить их на примерах из обычной жизни. Эту информацию необходимо четко структурировать. Можно сделать это, например, с помощью таблиц или схем.

Для того чтобы школьникам было легче воспринимать, в общем-то, ранее незнакомую им и абстрактную математическую информацию, учитель может каждой операции присвоить свой цвет. Так, например, дизъюнкция может выделяться красным, а конъюнкция – синим. Можно предложить ребятам самим выбрать цвета. Тогда на ассоциативном уровне им будет легче узнавать ту или иную операцию над предикатами.

Задача 1.

Докажите, что $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.

Решение.

Присвоим операциям, которые есть в данном выражении цвета. Дизъюнкция – красный, конъюнкция – синий.

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z).$$

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \equiv$$
$$\equiv (x \wedge x \wedge y) \vee (x \wedge x \wedge z) \vee (x \wedge z \wedge y) \vee (x \wedge z \wedge z) \vee (y \wedge x \wedge y) \vee$$
$$\vee (y \wedge x \wedge z) \vee (y \wedge z \wedge y) \vee (y \wedge z \wedge z) \equiv\equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee$$
$$\vee (y \wedge z) \vee (y \wedge z) \equiv x \wedge y \vee x \wedge z \vee x \wedge y \wedge z \vee y \wedge z \equiv$$
$$\equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z).$$

Задача 2.
Доказать, что

$$\overline{\bar{a} \wedge b \vee a \wedge b} \equiv a \wedge \bar{b} \vee \bar{b} \wedge \bar{a} \vee \bar{b}.$$

Решение.
Присвоим каждой операции из этого выражения свой цвет. Дизъюнкция – красный, конъюнкция – синий, отрицание – зеленый.

$$\overline{\bar{a} \wedge b \vee a \wedge b} \equiv a \wedge \bar{b} \vee \bar{b} \wedge \bar{a} \vee \bar{b}.$$

$$\overline{\bar{a} \wedge b \vee a \wedge b} \equiv \overline{\overline{\bar{a} \wedge b}} \wedge \overline{a \wedge b} \equiv \left(\bar{\bar{a}} \vee \bar{b}\right) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) \equiv a \wedge \bar{b} \vee \bar{b} \wedge \bar{a} \vee \bar{b}.$$

Задача 3. Изобразить геометрическое место точек $F\,(p;\,q)$, для которых
1) $(\exists\, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}^2 + p\boldsymbol{x} + q = 0)$;
2) $(\forall\, x)(x^2 + px + q = 0)$.

Решение.
Присвоим каждому квантору и зависимой от него переменной одинаковый цвет, а свободным переменным другой цвет. Квантор существования – фиолетовый, кантор всеобщности – оранжевый, свободные переменные – розовый.

1) Не трудно увидеть, что существование хотя бы одного действительного корня x квадратного трехчлена возможно только при неотрицательном дискриминанте, а значит $p^2 – 4q \geq 0$. Данное неравенство представляет собой геометрическое место точек плоскости, изображенной на рис. 1.

После раскраски задача имеет вид:

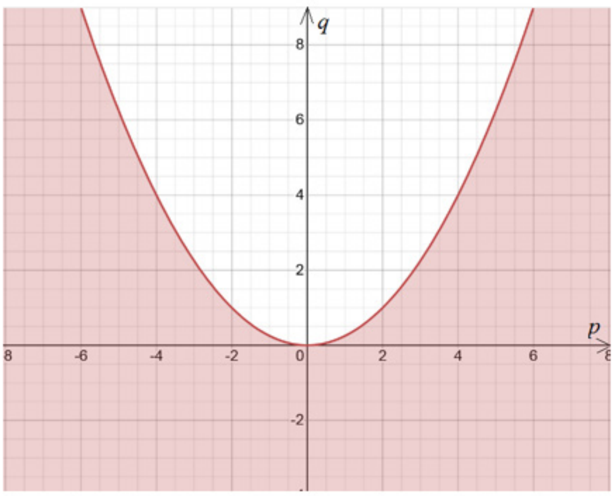

Рисунок – 1

2) Квадратный трехчлен не может равняться нулю при любом значении переменной x, а значит геометрическое место точек представляет собой пустое множество.

Введенная таким образом цветовая раскраска в приведенных примерах позволяет обучающимся быстрее запоминать свойства логических операций, видеть их в задачах, а также правильно эти свойства применять. Тем самым мы задействуем у ребенка не только репродуктивное запоминание формул и их применение, но и за счет наглядного представления цветового различия символов логических операций, кванторов, прежде всего они перестают их путать, так как разные цвета. Более того, обучающиеся могут творчески подходить к выполнению задания, то есть цвет логической операции может выбрать по настроению или по своим предпочтениям. При этом задействуются оба полушария головного мозга, как творческая составляющая, так и логическая.

Данная методика может быть применена и в вузовском образовании. Студентам первого–второго курсов, которые изучают математическую логику, при введении логических операций можно предложить также присвоить каждой операции свой цвет и все свойства перевести в цветовую палитру, что позволит им более детально разобраться во всех свойствах и без особых сложностей применять их при решении более сложных задач.

Из проиллюстрированных решений задач видно, что справиться с задачей намного проще, если каждой операции присвоен свой цвет. Интуитивно становится понятно какой следующий шаг необходимо сделать, а ведь развитие интуиции, наряду с выработкой логики – это и есть основная задача математического образования. Любители живописи часто говорят о звучании цвета в том или ином произведении изобразительного искусства. Возможно, недалек тот день, когда подобным образом зазвучат и математические доказательства.

Литература:

1. Бабенко А. С., Марголина Н. Л., Матыцина Т. Н., Ширяев К. Е. Обучение учителей математики в условиях введения профессионального стандарта / А. С. Бабенко, Н. Л. Марголина, Т. Н. Матыцина, К. Е. Ширяев // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2020. Т. 26. № 4. С. 154–160.
2. Марголина Н. Л., Троскина А. Е., Ширяев К. Е. Истоки естественнонаучной традиции / К. Е. Ширяев, Н. Л. Марголина // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин: материалы XIV Всероссийской научно-методической конференции. – Кострома: КГУ, 2021.
3. Ширяев К. Е., Матыцина Т. Н., Марголина Н. Л. Концепция развития математического образования и итоговая государственная аттестация / К. Е. Ширяев, Т. Н. Матыцина, Н. Л. Марголина // Ярославский педагогический вестник. 2017. № 2. С. 67–71.

Об авторах:

Бабенко Алена Сергеевна, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, alenbabenko@yandex.ru

Задворнова Алиса Сергеевна, студент, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, zadvornjva4alisa@gmail.com

Марголина Наталия Львовна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, nmargolina@mail.ru

Матыцина Татьяна Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, t_matycina@ksu.edu.ru

About the autors:

Alena S. Babenko, candidate of pedagogical sciences, assistant professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Kostroma State University, Kostroma, Russia, alenbabenko@yandex.ru

Alice S. Zadvornova, Student, Kostroma State University, Kostroma, Russia, zadvornjva4alisa@gmail.com

Natalia L. Margolina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Kostroma State University, Kostroma, Russia, nmargolina@mail.ru

Tatyana N. Matytsina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Kostroma State University, Kostroma, Russia, t_matycina@ksu.edu.ru

УДК 378; 51

Бабенко А.С., Смирнова А.О., Бутенина Д.В.

Развитие пространственного воображения обучающихся при изучении стереометрии с помощью программы Geogebra

В статье рассмотрен один из приемов обучения стереометрии в 10 классе с акцентом на формировании пространственных представлений обучающихся за счет использования интерактивных рисунков. На примере изучения аксиоматики стереометрии рассмотрено применение программы GeoGebra на уроках геометрии.

Ключевые слова: стереометрия, программа GeoGebra, цифровые технологии

Alena S. Babenko, Alena O. Smirnova, Daria V. Butenina

Development of Students' Spatial Imagination When Studying Stereometry Using the Geogebra Program

The article considers one of the methods of teaching stereometry in the 10th grade with an emphasis on the formation of spatial representations of students through the use of interactive drawings. Using the example of studying the axiomatics of stereometry, the application of the GeoGebra program in geometry lessons is considered.

Keywords: stereometry, GeoGebra program, digital technologies

После перехода от ступени основного общего образования к ступени среднего общего образования школьники сталкиваются с огромными трудностями, возникающими при обучении стереометрии, при построении геометрических фигур в пространстве и представлении их при изображении на плоскости. На первых уроках очень важно заложить основы пространственных представлений, ведь дальнейшее изучение геометрии основывается на этом, и сформировать навык применения основных понятий стереометрии, аксиом и следствий из них при доказательстве теорем и решении задач, а также важно обратить внимание на математическую символику при оформлении задач. Кроме того, простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов) являются также одним из заданий ЕГЭ по математике, как профильного, так и базового уровней.

Цели изучения стереометрии можно назвать следующие:

- дальнейшее формирование навыков логического мышления;
- развитие пространственного представления;
- владение основными понятиями о пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах;
- формирование умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры;
- применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием.

В первую очередь изучение стереометрии дает возможность развития пространственных представлений и пространственного воображения (о других возможностях изучения геометрии можно посмотреть в работах [1, 2]).

Существуют несколько основных типов пространственных представлений: по описанию представить себе, вообразить пространственную конфигурацию, по описанию построить хороший чертеж, выбрать ракурс, представить фигуру по готовому чертежу.

Не каждый ученик имеет хорошее пространственное представление, но его можно развить учением, то есть учением строить чертежи. Решать задачи на пространственное представление, использовать наглядное моделирование на моделях и 3D моделях.

Системный курс стереометрии строится по той же схеме, что и курс планиметрии:

- перечисляются основные понятия, которым не дается определение;
- формируются аксиомы, в которых выражаются свойства основных понятий, с помощью основных понятий формируются определения других геометрических понятий, хотя хотелось бы отметить, что в учебниках по геометрии для 10-11 классов авторы дают разную аксиоматику, но за счет следствий из аксиом разница в освоении первых тем в дальнейшем нивелируется;
- на основании определений и аксиом доказываются теоремы.

Перед началом изучения стереометрии желательно повторить основные принципы, по которым строится планиметрия.

На первых уроках необходимо познакомить учащихся с основными понятиями (точка, прямая, плоскость). Обратить внимание на способы изображения плоскости и на то, что прямая и плоскость бесконечны.

Для обозначения взаимного расположения точек, прямых и плоскости используется теоретико-множественная символика:

– точка принадлежит плоскости;
– точка не принадлежит плоскости;
– прямая принадлежит плоскости;
– прямая пересекает плоскость;
– плоскости пересекаются по прямой.

На первых уроках необходимо познакомить учащихся с пространственными фигурами, особенно, многогранниками (прямоугольным параллелепипедом, кубом, призмой, пирамидой). Показать их модели и чертежи.

Основными наглядными моделями могут служить модели и 3D модели. Изучать плоскости и прямые в пространстве, их взаимное расположение целесообразно с опорой на представления о многогранниках для большей содержательности и наглядности материала.

При введении аксиом возможны этапы:

– иллюстрация на модели;
– формулировка аксиом;
– схематический чертеж;
– краткая запись.

При изучении планиметрии формирование того или иного понятия часто основывается на чертеже, который отражает это понятие адекватно.

В стереометрии лишь пространственная модель может считаться адекватной изучаемой геометрической ситуацией. На первых этапах мы бы рекомендовали использовать модели, но впоследствии следует ограничить их применение для развития пространственного воображения школьников.

Чертежи, применяемые в курсе стереометрии, являются плоскостными и представляют обычно не сам объект, а его искаженное изображение.

Выполнение чертежей пространственных фигур на плоскости и использование готовых чертежей весьма затруднительно для учащихся (особенно на первых порах).

Поэтому при формировании основных стереометрических понятий особенно важно научить обучающихся правильно использовать наглядные модели и уметь использовать плоские чертежи пространственных фигур, на этом этапе могут помочь интерактивные геометрические модели.

Интерактивные геометрические модели – это чертежи, которые могут изменяться как учителем, так и учениками в процессе и после окончания построения.

Для их разработки были изучены и проанализированы программы по 3D моделированию. В ходе анализа и сравнения наиболее подходящей была определена программа GeoGebra, которая, как и остальные, ориентирована на создание интерактивных геометрических моделей, но наиболее проста в использовании.

Для реализации создания интерактивных моделей были выбраны первые три аксиомы из курса геометрии 10-11 класса по учебнику под редакцией Атанасяна, однако данные аксиомы по содержанию пересекаются и с учебником под редакцией Мерзляка:

– через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и при том только одна;
– если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости;
– если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Использовать данные разработки рекомендуется на уроках изучения нового материала, но не исключается использование и на уроках закрепления.

При введении первой аксиомы можно предложить ученикам поставить три точки произвольным образом в своих тетрадях и задать вопрос: «Как вы думаете, сколько плоскостей проходит через все три точки?» С большей вероятностью ученики дадут правильный ответ, так как все эти точки лежат в плоскости тетради. Затем можно предложить ученикам одну точку мысленно из тетради «поднять» и задать тот же вопрос. В этом случае у них могут возникнуть трудности с ответом, потому что как таковую плоскость они уже не видят. На этом этапе возникает необходимость в интерактивном чертеже (рис. 1.), на котором учащиеся увидят, что как бы не изменялось расположение точек в пространстве, через них всё равно проходит единственная плоскость.

Рисунок 1 – Интерактивная молель первой аксиомы

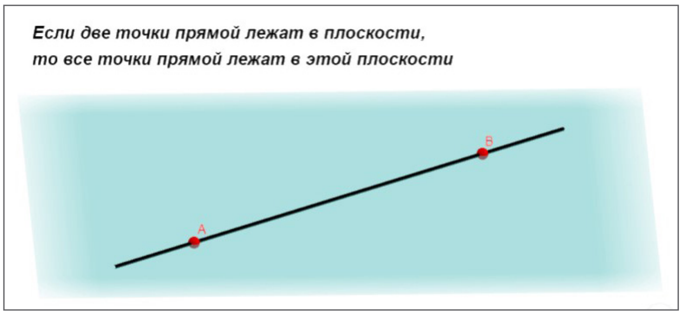

Рисунок 2 – Интерактивная модель второй аксиомы

При введении второй аксиомы можно предложить учащимся в тетрадях построить плоскость, отметить в ней две точки и провести прямую, проходящую через эти две точки. Затем предложить произвольным образом отметить на этой прямой ещё одну точку и задать вопрос «А принадлежит ли данная точка этой же плоскости? Как вы это поняли?» На этом этапе при использовании интерактивного анимированного чертежа (рис. 2.) можно показать, что все точки данной прямой будут лежать в этой плоскости.

При введении третьей аксиомы можно сразу воспользоваться интерактивным чертежом (рис. 3.), на котором будут изображены две пересекающиеся плоскости, далее задать вопрос «Есть ли у этих плоскостей общая точка?», отметить эту точку на чертеже и спросить: «А есть ли ещё общие точки?» Выслушав ответы учеников, ввести аксиому и показать, что в какой бы точке не пересекались плоскости, всегда будет существовать и прямая их пересечения.

Таким образом, использование интерактивных моделей на уроках геометрии помогает учителю обеспечить наглядность изучаемого учебного материала, а школьникам, в свою очередь, визуализировать его.

Литература:

1. Бабенко А. С., Смирнова А. Н. Разработка веб-квестов по геометрии как средство проверки сформированности компетенций студентов педагогических направлений подготовки / А. С. Бабенко // «Актуальные проблемы преподавания математических и естественно-научных дисциплин в образовательных организациях высшего образования»: Сборник докладов очно-заочной научно-методической конференции. – Кострома: Издательство «Военная академия радиационной, химической и биологической защиты имени Маршала Советского союза С. К. Тимошенко», 2021. – С. 82-88.
2. Бабенко А. С., Смирнова А. О. Из опыта преподавания геометрии в рамках дистанционного обучения / А. С. Бабенко, А. О. Смирнова // Актуальные технологии преподавания в высшей школе: материалы научно-методической конференции. Ответственные редакторы Г. Г. Сокова, Л. А. Исакова. – Кострома: Издательство Костромской государственный университет, 2020. – с. 7-10.

Об авторах:

Бабенко Алена Сергеевна, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, alenbabenko@yandex.ru

Смирнова Алена Олеговна, старший преподаватель кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, aleosmir@mail.ru

Бутенина Дарья Вадимовна, магистрант, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Россия, dashabutenina1509@gmail.com

About the autors:

Alena S. Babenko, candidate of pedagogical sciences, assistant professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Kostroma State University, Kostroma, Russia, alenbabenko@yandex.ru

Alena O. Smirnova, Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics, Kostroma State University, Kostroma, Russia, aleosmir@mail.ru

Daria V. Butenina, Master student, Kostroma State University, Kostroma, Russia, dashabutenina1509@gmail.com

УДК 514.7

Галямова Э.Х.

Приемы и методы обучения поиску решения геометрических задач

В статье представлен опыт формирования приемов и методов обучения поиску решения геометрических задач через проектирование урока геометрии в виртуальной среде. Цифровой симулятор представляет собой виртуальную образовательную среду по подготовке будущего учителя математики. На цифровом симуляторе формируется и диагностируется умение решать геометрические задачи повышенной сложности и организовывать процесс поиска решения. Описана подготовительная работа по созданию модели симулятора.

Ключевые слова: виртуальная среда, цифровой тренажер, симулятор, профессиональная подготовка, поиск решения задачи

Elmira H. Galyamova

Development of a Digital Simulator of Pedagogical Activity

The article presents the experience of forming techniques and methods of teaching the search for solutions to geometric problems through the design of a geo-metric lesson in a virtual environment. The digital simulator is a virtual educational environment for the preparation of a future mathematics teacher. On the digital simulator, the ability to solve geometric problems of increased complexity and organize the process of finding a solution is formed and diagnosed. The preparatory work on creating a simulator model is described.

Keywords: digital simulator, labor actions of a teacher, problem solving strategy, virtual environment

Решение задач играет одну из ведущих ролей в процессе обучения математике. Формирование умения решать задачи обеспечивает с одной стороны процесс усвоения знаний и способов учебной деятельности, с другой стороны реализует возможность применения конкретных способов действий на практике. Кроме этого, обучение поиску решения задачи, является одной из основных методических задач в процессе профессиональной подготовки будущего учителя математики. Умение решать задачи эффективно формируется, если методика обучения на уроках геометрии направлена не только на усвоение теоретических знаний и опыта решения отдельных задач, но и на усвоение общих приемов и методов поиска решения. Это требует целенаправленной методической работы со студентами как в курсе дисциплин «Элементарная математика», так и в ходе изучения «Методики обучения математики».

Содержание дисциплины «Элементарная математики» должно включать знакомство с общематематическими методами доказательства и эвристиками. Приведем пример одной из эвристических схем, которая может направлять поиск решения задачи студентами.

- Прочитайте текст задачи.
- Выделите условие и требование задачи. Сделайте рисунок и подпишите данные на чертеже, поставьте знак вопроса на объекте, значение величины которого нужно найти, или запишите что требуется доказать на математическом языке. Если затрудняетесь, переформулируйте требование или замените равносильным ему предложением.
- Если в требовании задачи содержится термин, замените его определением понятия, которое оно обозначает. Используйте признак понятия, если он есть.
- Перечислите те математические утверждения, из которых следует утверждение задачи.
- Перечитайте условие и выберите данные, из которых можно составить соотношение, из которого следует требование задачи.
- Выделите информацию, на основании которой можно применить утверждение, позволяющее «состыковать» условие и требование.
- Если выбранный путь не помогает Вам в решении, попробуйте перечислить все утверждения, которые следуют из условия задачи. Выберите то утверждение или соотношение, которое позволит Вам «приблизиться» к требованию задачи.
- Если выбранный путь не помогает Вам в решении, попробуйте «разбить» задачу на подзадачи, решение которых Вам уже известно.
- Продолжайте рассматривать возможные пути, пока не установите положение, из которого следует требование задачи.

Параллельно в курсе практических занятий по дисциплине «Методика обучения математике» необходимо показывать студентам, как будущим учителям, что в основе аналитико-синтетической деятельности лежат такие действия, как:

- переформулирование требования задачи;
- выведения следствия; подведение объекта под понятие;
- чтение чертежей;
- переходы от определения понятия к существенным свойствам,
- составление задачи и т.д.

Рассмотрим применение данных приемов в процессе поиска решения задачи на примере геометрической задачи повышенной сложности из второй части в материалах подготовки к ЕГЭ: «В равнобедренном треугольнике основание 34, а боковая сторона 49. Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает вписанную в треугольник окружность,».

Как показали исследования, основную трудность обучающиеся 10-11 классов испытывали на этапе анализа текста задачи. Более 70% школьников указали на причину трудности – «Не понятно, что требуется доказать». Требование задачи, сформулировано не в классическом варианте, к которому ученики «привыкли» в школьных учебниках, а требует знание условия пересечения окружности с прямой или интерпретации на языке отношений «больше-меньше». Менее 15% испытуемых смогли воспроизвести условие пересечения прямой и окружности. Возможно, причиной является отсутствие задач на применение этого условия в других темах, следующих после изучения темы «Окружность».

Для преодоления затруднений в ходе поиска решения испытуемыми, порционно выдавались подсказки школьникам в процессе нашего исследования. Применение приема «переформулировка требования задачи» состоит в данном случае в предъявлении наводящего указания: «Переформулируйте требование задачи, используя термины «высота», «радиус» или «диаметр».

Прием «выведение следствия» реализован на применении синтетического метода поиска решения, через наводящий вопрос учителя: «Зная стороны треугольника, значения каких величин мы можем найти?».

Прием «чтение чертежей» позволяет значительно продвинуть школьников в решении геометрических задач. Переход от устной формы работы с готовыми чертежами, при совмещении с приемом «чтение чертежа», к действиям «подведению под понятие» или «выведение следствий» эффективно на начальных этапах изучения геометрии и на этапе актуализации знаний урока усвоения нового материала.

Ключевым аспектом всего процесса поиска решения геометрической задачи является выбор подходящей стратегии.

Исследователями данного вопроса обсуждаются следующие приемы:

- стратегия визуального представления;
- стратегии организации данных;
- стратегия учета всех возможностей;
- действие от обратного;
- анализ экстремальных ситуаций;
- принятия другой точки зрения;
- распознавание закономерности;
- решение более простой задачи с визуальным представлением (схематичным изображением);
- учет всех возможностей;
- организацией данных и распознаванием закономерности.

Первая стратегия применима и к геометрическим задачам, особенно, из раздела «Стереометрия». Например, рассмотрим задачу на доказательство перпендикулярности плоскостей АА1М и ВСТ в правильной треугольной призме АВСА1В1С1, где точка М-середина ребра В1С1, а точка Т-середина А1М. Визуальное представление перпендикулярных плоскостей позволяет перейти к пониманию необходимости применения признака перпендикулярности прямой и плоскости. Большим подспорьем в применении этой стратегии является стереометрический альбом программы «Живая математика», где анимация выполненного чертежа позволяет «покрутить» и посмотреть фигуру со всех сторон. Вторая стратегия подразумевает грамотную запись данных на математическом языке, введение традиционных обозначений. Например, не рекомендуется использовать обозначение точки буквой «О», если рассматриваемая точка по условию задачи не является центром окружности. Стратегия учета всех возможностей эффективна при условии, если в задаче не обозначены «особые» условия, например, вид треугольника, при этом ученик должен прийти к выводу, что треугольник тупоугольный и только в этом случае выполняется условие задачи. Более конкретно с данным вопросом можно ознакомиться в работах Позаментье А. [7] и Тестова В.А.

Цифровизация процесса обучения геометрии придала новый импульс обучению решению задач с появлением виртуальных конструкторов и цифровых симуляторов в системе образования. Опыт внедрения цифровых симуляторов в профессиональную подготовку различных сфер деятельности можно изучить в предложенных источниках [3, 4]. Изменения в подготовке будущих учителей связаны с требованиями к информационной образовательной среде [1, 4, 6]. В ходе работы над проектом цифровизации образовательной среды НГПУ коллективом ученых и программистов разработаны несколько моделей цифровых тренажеров и симуляторов. В ходе реализации проекта «Цифровизация образования» преподаватели факультета математики и информатики работали над симулятором по обучению поиску решения задачи.

На первоначальном этапе проектирования симулятора по обучению студентов – будущих учителей математики к работе со школьниками на уроке по решению геометрической задачи были изучены основные трудности школьников в процессе поиска решения геометрических задачи [2, 7, 5]. Современные модели решения задач основаны на последовательности действий, описанных еще Д. Пойа в книге «Как решить задачу»:

- анализ текста задачи,
- составление плана,
- реализация плана,
- оценка решения.

Сюжет разрабатываемого симулятора предполагает лучший результат его прохождения при условии, что пользователь будет придерживаться четырехэтапной эвристической модели. Проектирование фрагмента урока основана на визуализации чертежа по тексту задачи, фронтальной работы с классом по поиску решение задачи и анализ предложенного школьником решения. Поиск методов и приемов поиска решения всем классом является ключевым моментом создания модели симулятора [7].

С целью повышения предметной составляющей, содержательную основу симулятора составляет решение геометрической задачи повышенной сложности [5]. Для создания модели симулятора проанализированы действия учеников 10-11 классов в процессе решения одной задачи. Для создания содержательной модели в состав заданий одной из олимпиад, проводимой НГПУ, была включена предложенная выше геометрическая задача. Под руководством методистов вуза учителями математики в ходе курсов повышения их квалификации составлены сценарии проведения фрагмента урока по решению данной задачи обучающимися 10-11 классов. В результате методического и дидактического анализа материалов составлен блок возможных вариантов решения задачи учениками средней школы. Анализ различных сценарных сюжетов помог выделить и обобщить типовые действия учителей математики. Поиск причин затруднений обучающихся, которые они фиксировали в процессе решения задачи на полях тетради, позволил выделить варианты оформления чертежей, возможных путей решения и типовых ошибок школьников. Данный этап работы над симулятором является подготовительным и в тоже время трудоемким, так как полученный материал становится основой модели цифрового тренажера и симулятора. Следует отметить соответствие формируемых и диагностируемых умений требованиям Профессионального стандарта педагога. Основной задачей симулятора является формирование трудового действия «планирование и проведение учебных занятий» общепедагогической функции обучения [8].

Визуализация класса представляет собой три пары обучающихся различных способностей. Симуляция хода урока представляет реальную учебную работу 10-11 класса: непонимание поставленной задачи некоторыми учениками, индивидуальное решение отдельными учениками в собственном режиме. В виртуальном классе пользователь не догадывается, кто из учеников понял условие задачи, а кто затрудняется в понимании, поэтому будущий учитель на виртуальном уроке должен ориентироваться и учитывать диагностику понимания задачи и применять различные методы и приемы поиска решения.

Приступая к работе в симуляторе, пользователь сначала проходит тренажер по решению геометрической задачи, а затем только принимает на себя роль виртуального учителя. Только после этапа проверки его уровня владения различными способами решения задачи он допускается к проведению виртуального урока геометрии. Программой заложен выбор сменяющихся этапов работы над задачей, предлагаются вопросы школьникам по анализу задачи. Пользователь самостоятельно решает проводить ли ему опроса школьников, выбирает определенного ученик, а кликая по нему мышкой, если его записи в тетради желает проверить, при этом он должен контролировать временные затраты, так как урок рассчитан на 40 минут. Об эффективности выбранного пользователем методического приема или метода поиска решения говорит верное решение задачи большей частью класса и отсутствие непонимания учеником, которое демонстрирует аватар.

Статистическая оценка результатов исследования по использованию цифровых симуляторов в процессе профессиональной подготовки является значимым средством в формировании практического опыта будущего учителя [6]. Опыт работы на симуляторе поможет будущему учителю ориентироваться в выборе метода и приема поиска решения задачи, сформировать навык выбора дидактического средства и методических приемов.

Опыт работы на цифровом тренажере и симуляторе педагогической деятельности до выхода на педагогическую практику поможет выработать свой методический подход к организации процесса поиска решения задачи. Учет и анализ вариативности способов решения задачи учениками и их возможные ошибки помогут понять учителю принцип выбора методических приемов по предложенному школьниками способу решения задачи.

Симулятор проектируется таким образом, что на каждом этапе происходит смена позиции действия учителя и виртуальных школьников, чтобы не было жесткой конструкции и пользователь не мог выбирать опции с учетом предыдущих попыток. В случае, если студент не разобрался в решении задачи на этапе работы на тренажере, то он не допускается к работе в виртуальном классе. Разнообразие сюжетных линий обеспечивает многоразовое его применение в курсе изучения дисциплин методического цикла для выявления уровня овладения компетенций по планированию и проведению учебного занятия и определить дефициты профессиональных умений.

По окончанию работы на экране в таблице программа представляет результаты и возможный балл, который мог бы получить пользователь в соответствии с определенным критерием. Профессиональные дефициты пользователя определяет программа и дает рекомендации. Все результаты прохождения симулятора пользователем сохраняются, что позволяет проследить динамику продвижений пользователя.

В качестве выводов отметим, что внедрение симуляции педагогической деятельности позволит развивать трудовые действия будущих учителей математики в соответствии с профессиональным стандартом педагога.

Кроме этого, использование тренажера по решению задач повышенной сложности и симулятор виртуального урока могут стать эффективным инструментом для отработки методических умений будущих педагогов в предметной области «Математика».

Литература:

1. Бажина П.С. Концептуальная модель симулятора «Управляй классом» для студентов педагогического Вуза // Мир науки, культуры, образования, 2018. №3 – С. 242-244.
2. Галямова Э.Х. Cognitive Styles in Solving Educational Tasks/ Journal of History Culture Art Research (ISSN: 2147 – 0626) Tarihi Kültüre Sanat Araştırmaları Dergisi Vol. 8, No. 4.p. 371-381
3. Дудырев Ф.Ф. Симуляторы и тренажеры в профессиональном образовании: педагогические и технологические аспекты // Вопросы образования / Educational Studies Moscow, 2020. – № 3. – С. 255-276.
4. Ключко В.И., Матяж А.С., Жуков В.А. Технологии виртуальной реальности: современные симуляторы и их применение // Научные труды КубГТУ, 2016. – № 15. – С. 94-104.
5. Львовский В. А. Проблемно-задачный подход к обучению в школе и вузе / UniverCity: Города и Университеты / под ред. С. Н. Вачковой. Москва: Издательство «Экон-Информ», 2018. – С. 89-100
6. Матвеев С.Н., Галямова Э.Х., Киселев Б.В. О статистической оценке внедрения обучающих математических тренажеров–симуляторов в обучение // Проблемы современного педагогического образования/Сборник научных трудов. Ялта, 2021. – №71 (1). – С.249-255.
7. Позаментье А. Стратегии решения математических задач: различные подходы к типовым задачам. Москва: Альпина Паблишер, 2018. – 223 с.
8. Профессиональный стандарт «Педагог (педагогическая деятельность в сфере основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)»: Приказ Министерства труда и социальной защиты РФ от 18 октября 2013 г. № 544н «URL: http://www.rosmintrud.ru/docs/mintrud/orders/129

Об авторе:

Галямова Эльмира Хатимовна, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой математики, физики и методики обучения, ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», г. Набережные Челны, Россия

About the autor:

Elmira H. Galyamova, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Mathematics, Physics and Teaching Methods, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia

УДК 336.1: 51

Зарецкая А.Е.

Популяризация математики через обучение основам финансовой грамотности

В статье речь идет о взаимосвязи процесса изучения математики и основ финансовой грамотности в школе.

Рассматриваются аспекты популяризации математики через обучение основам финансовой грамотности.

У школьников формируются навыки составления и использования математических моделей в реальной жизни.

Ключевые слова: математика, финансовая грамотность, практикоориентированные задачи, экономика в быту, игровые технологии, основы предпринимательства

Anna E. Zaretskaya

Popularization of Mathematics Through Teaching the Basics of Financial Literacy

The article deals with the relationship between the process of studying mathematics and the basics of financial literacy at school. The aspects of popularization of mathematics through teaching the basics of financial literacy are considered.

Students develop the skills of composing and using mathematical models in real life.

Keywords: mathematics, financial literacy, practice-oriented tasks, economics at home, gaming technologies, fundamentals of entrepreneurship

На IV Всероссийском съезде учителей математики в Сочи отмечалась ведущая роль математики в современном мире, растущий запрос на специалистов с хорошей математической подготовкой. Основы математических знаний, несомненно, закладываются в школьном курсе. Но как привить ученикам желание изучать математику не по принуждению, а осознанно, вникая в суть материала? Зачастую, непонимание практического применения полученных знаний, ведет к формальному подходу изучения математики. И тут на помощь приходят практикоориентированные задачи, в том числе по финансовой грамотности. Примерная основная образовательная программа основного и среднего общего образования уже содержит модули по основам финансовой грамотности. Но знать теоретические понятия недостаточно, надо уметь считать и просчитывать. Неотъемлемая роль в этом процессе принадлежит математике.

Перед каждым человеком в определенное время встает вопрос о грамотном обращении с финансами и преумножении своего материального состояния.

Люди, просвещенные в области финансов, умеют просчитывать риски. Они более защищены от непредвиденных экономических ситуаций. Уровень благосостояния повышают за счет ответственного отношения к управлению финансами, грамотно сопоставляют денежные ресурсы и будущие расходы.

В настоящее время каждый, даже школьник, постоянно встречается с экономическими вопросами.

Чем интереснее и неформальное будет проходить процесс обучения, тем эффективнее будет итог проведенной работы.

При формирование положительного настроя в изучении математики через финансовую грамотность, можно рассмотреть конус Эдгара Дейла. В котором показано как правильно усваивается материал, и на основе увиденного можно сделать вывод, что лучший способ усвоения материала – это взаимодействие.

И, конечно, одной из педагогических технологий интерактивного обучения, является игровая технология в образовательном процессе. Учебная игра по финансовой грамотности – это игра, в которой моделируются ситуации в сфере личных финансов и взаимоотношений людей с финансовыми, государственными и иными организациями с целью формирования или развития у игрока финансовых компетенций. Посредством игры формируется положительный настрой при изучении материала. Школьники с удовольствием становятся участниками таких игр как: «Денежный поток», «Монополия», «Бизнес – life», «Финансовый футбол» и др. Игры дают понимание правильного инвестирования, способствуют получению базовых знаний в деле превращения идей в активы, являются стимуляторами ведения собственного бизнеса, помогают овладеть базовыми знаниями. Учат логически мыслить, действовать в соответствии с определенной стратегией и умению считать.

На основе существующих игр ученики создают собственные, что, несомненно, говорит о заинтересованности и понимании необходимости получать глубокие знания по математике, ведь без них невозможно осуществить задуманные планы.

В игровой форме школьники учатся распоряжаться заработанными капиталами и умению планировать, стратегии получать денежные средства.

Игры обучают следующим навыкам:

1. Тратить деньги более эффективно.
2. Умело планировать свои расходы в долговременной перспективе.
3. Ответственно относится к финансовым активам.
4. Проявлять предприимчивость и инициативу.
5. Познавать мир финансов и интересоваться новейшими технологиями и понятиями.
6. Уметь договариваться и строить деловые отношения.

В непринуждённой обстановке школьники учатся управлять финансами, получают сведения, необходимые в ежедневном обращении с денежными средствами.

Познавая основы финансовой грамотности, ученик сталкивается с необходимостью применять математические знания не в рамках программы курса математики, а в практической, порой нестандартной ситуации, что способствует осознанию необходимости качественнее и добросовестнее изучать математику. И тут важно найти связь между математикой и финансовой грамотностью, сформировать такой комплекс мероприятий, который позволит обеспечить эффективность этих составляющих.

В него входят встречи с предпринимателями, представителями банков, профессиональные пробы на предприятиях, мастер классы по изучению тонкостей предпринимательской деятельности.

В осознании необходимости учить математику убеждаются выпускники при решении экономических задач в ЕГЭ. Умения составить правильную модель решения задачи недостаточно для получения максимального балла, нужны еще правильные расчеты, которые порой не являются элементарными. Выпускники учатся решать задачи на вклады и кредиты, акции и другие ценные бумаги, изучают методы оптимальных решений.

Встречаются с различными схемами возврата кредита или увеличения суммы вклада, учатся упорядочивать данные таким образом, чтобы большой массив текста превратился в удобную математическую схему. Чтобы правильно решать такие задачи, необходимо владеть формулой сложных процентов. Приходят к пониманию того, что нужно знать о ценной бумаге, чтобы решать подобные задания, не вдаваясь в экономические особенности.

Особый блок задач связан с оптимальными решениями. Он позволяет максимизировать одну целевую функцию при учёте данных в условии ограничений.

Основные типы заданий в этом блоке:

1. Оптимизация работы на производстве с учётом цен на рынке товара и факторов производства;
2. Многозаводское производство (включая разные заводы/ отели/ другие рабочие пространства);
3. Транспортная задача.

Задачи с экономическим содержанием являются практическими задачами. А их решение, бесспорно, способствует более качественному усвоению содержания курса математики, позволяет осуществлять перенос полученных знаний и умений в экономику, что в свою очередь, активизирует интерес к задачам прикладного характера и изучению математики в целом.

Одним из направлений популяризации математики является вовлечение школьников в олимпиады по финансовой грамотности различных уровней. Проходя несколько этапов такого марафона, участники учатся всесторонне рассматривать предложенные проблемы, уметь переводить жизненные задачи на язык математики, просчитывать и придумывать адекватные выходы из предложенных ситуаций.

По мнению призеров всероссийской олимпиады по финансовой грамотности, они приобрели колоссальный опыт в различных экономических вопросах, приблизились к понимаю необходимости оттачивать вычислительные навыки, думать нестандартно, составлять математическую модель предложенной задачи и доводить ее до логического завершения, получая верный ответ.

В заключении хотелось бы отметить, что математические навыки неотделимы от различных аспектов основ финансовой грамотности.

Умение составлять математические модели при решении задач реальной жизни, помогут школьникам адаптироваться к изменениям в обществе.

Литература:

1. Брехова Ю.В., Алмосов А.П., Завьялов Д.Ю., Б87 Финансовая грамотность: материалы для учащихся. 10–11 классы общеобразоват. орг. – М.: ВАКО, 2018. – 344 с.
2. Кривонос О.В. Формирование финансовой грамотности на уроках обществознания и математики. // Приоритетные направления развития науки и образования: Материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 29 янв. 2016г) / Редкол.: О.Н.Широков [и др.]. – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2016.-№1(8) – С.142-146
3. Вигдорчик Е.А., Липсиц И.В., Корлюгова Ю.Н. Финансовая грамотность: методические рекомендации для учителя. 5-7 классы общеобразоват. орг./.-М.:ВИТА-ПРЕСС, 2015,С.64.
4. Обердерфер Д.Я., К.В. Кириллов, Е.Ю. Захарова и др. Я управляю своими финансами:, практическое пособие по курсу «Основы управления личными финансами» / 4-е изд., дополн. – М.: ВИТА-ПРЕСС, 2020. – 240 с.: ил. (Дополнительное образование. «Финансовая грамотность каждому»)

Об авторе:

Зарецкая Анна Евгеньевна, учитель математики, МКОУ «Средняя общеобразовательная школа №6», г. Киров, Калужская область, Россия, aez008@yandex.ru

About the autor:

Anna E. Zaretskaya, mathematics teacher, Secondary School No. 6, Kirov, Kaluga Region, Russia, aez008@yandex.ru

УДК 37

Кипяткова О.С.

Реализация основных идей принципа фундаментальности при изучении курсов «Теоретические основы начального курса математики» и «Математика»

В статье рассмотрена система методов преподавания и изучения математики, с помощью которых может быть реализован популярный принцип фундаментальности математического образования. Перечисленные методы проиллюстрированы примерами, относящимися к фундаментализации математического образования на педагогическом факультете ЯГПУ им. К.Д. Ушинского.

Ключевые слова: принцип фундаментальности, математика, будущие учителя начальных классов

Oksana S. Kipyatkova

Implementation of the Main Ideas of the Principle of Fundamentality in the Courses "Theoretical Foundations of the Initial Course of Mathematics" and "Mathematics"

The article considers a system of methods for teaching and studying mathematics, with the help of which the popular principle of the fundamentality of mathematical education can be implemented. The named methods are illustrated with examples related to the fundamentalization of mathematical education at the Pedagogical Faculty of the YSPU. K.D. Ushinsky.

Keywords: principle of fundamentality, mathematics, future primary school teachers

Фундаментализация образования – явление в педагогике высшей школы отнюдь не новое. Российские вузы всегда были ориентированы на этот феномен. Однако в современных условиях меняется само понятие фундаментальности и фундаментализации образования. В современном понимании выделяется две распространенных точки зрения к понятию фундаментализации: «образование вглубь» и «образование вширь». Однако, следует отметить, что термин фундаментальности образования далеко не однозначен, а рассмотренные подходы полностью не исчерпывают данное понятие, и все то новое, что появилось в обсуждении этого принципа в последние десятилетия, – заключается в признании его значимости для всех разновидностей математического образования.

По отношению к математической подготовке будущих учителей начальных классов одним из возможных направлений фундаментализации может выступать принцип моделирования научных исследований. Об этом неоднократно упоминалось в следующих работах [1, 3]. В настоящей работе для нас актуален другой вопрос, как повысить уровень математической подготовки будущего учителя начальных классов, какие для этого существуют механизмы и как проникают идеи принципа фундаментальности в систему высшего образования?

Нами были выделены три основных крупных направления фундаментализации математического образования: профессионально направленное обучение (контекстное обучение); использование интеграционных связей; применение информационных технологий. Предлагаемые направления носят довольно общий характер, что не позволяет в полной мере использовать их при математической подготовке учителей начальных классов. Для их конкретизации необходимо выделение путей реализации повышения фундаментальности курсов «Теоретические основы начального курса математики» и «Математика» для будущих учителей начальных классов. При этом в процессе подготовки учителя начальных классов целесообразно будет, на наш взгляд, использовать такие приемы как ориентация обучения на методологические знания и овладение способами продуктивной деятельности.

Приведем краткий список методов, с помощью которых можно, по мнению автора, реализовать основные идеи принципа фундаментальности при обучении будущих учителей начальных классов.

- Знакомство с общенаучными методами исследования в процессе преподавания и изучения математики.
- Знакомство с элементами методологии математики в процессе изучения собственно математики.
- Повторное, вслед за классиками, изобретение студентами изучаемых теорем и определений.
- Личный опыт исследовательской деятельности в области математики.
- Включение изучаемых теорий в более широкий и глубокий научный контекст. В частности, включение элементарной математики в контекст высшей математики.

- Использование методов экспериментальной математики в процессе преподавания и изучения математики.
- Использование систем задач в качестве средства выявления свойств математики как науки.

Для реализации идей принципа фундаментальности каждый из перечисленных методов был наполнен предметным содержанием и оценен с точки зрения его эффективности в курсах «Теоретические основы начального курса математики» и «Математика». Разумеется, некоторые пункты этой программы реализованы в той или иной мере, например, в работах [2, 4, 5].

В контексте фундаментализации математического образования мы предлагаем нетрадиционный подход к изучению этих курсов, положив в основу принцип моделирования научных исследований.

Так, например, изучение частнонаучных методов в области математики может способствовать моделированию исследовательской математической деятельности будущих учителей начальных классов, а внедрение методологических знаний в образование с необходимостью приводит к углубленному усвоению фундаментальных математических знаний.

Освоение основ математики как экспериментальной науки оказывается новым этапом постижения ее сущности более глубоким, чем традиционное восприятие математики как науки теоретической. Применение заданий, имеющих многоступенчатую ориентацию, при обучении будущих учителей начальных классов во многом позволяет воспроизводить структуру исследовательской деятельности.

Рассматривая элементарную математику с точки зрения высшей в курсах «Теоретические основы начального курса математики» и «Математика», следует произвести отбор разделов математики, для которых рассмотрение их с двух точек зрения требует минимальной математической техники, а также выявление взаимосвязи между двумя уровнями изучения отобранных разделов математики. Примером здесь может служить рассмотрение понятия «функция» с различных точек зрения – классическое (генетическое), опирающееся на понятие «переменная величина», и теоретико-множественное (логическое), связанное с отказом от использования переменной величины. Главным результатом такого изучения для студента станет приобретение новой, более широкой точки зрения на изучаемый объект. При этом изучение различных точек зрения на один и тот же математический объект усиливает фундаментальный компонент подготовки в области элементарной математики.

Весьма важной особенностью при обучении математике будущих учителей начальных классов должно стать обучение методам научного исследования, к которым относятся анализ и синтез; индукция и дедукция; сравнение и аналогия; обобщение, абстрагирование и конкретизация. Этого можно достичь, вооружая студентов общенаучными методами познания. Студентов необходимо научить не столько определенной сумме знаний, сколько умению учиться и добывать знания самостоятельно, повышая при этом их фундаментальную подготовку.

По нашему мнению, традиционный задачный материал, используемый в курсах «Теоретические основы начального курса математики» и «Математика», может быть преобразован к виду, удовлетворяющему требованиям концепции укрупнения дидактических единиц. Задачи, сгруппированные в УДЕ, позволяют студенту практиковаться не только в решении, но и в составлении задач, в их обращении, обобщении, рассуждениях по аналогии. Использование таких систем задач означает воспроизведение в процессе преподавания важных свойств математических исследований. Другими словами, реализация принципа фундаментальности достигается не за счет расширения и углубления содержания математического курса, а за счет его деятельностного компонента.

Самостоятельное открытие математических фактов позволяет студенту легко понять его суть, что помогает не только глубокому (фундаментальному) усвоению материала, но и воспроизведению действий ученого-математика в процессе его «открытия». Повторно открывая теоремы и определения, будущие учителя начальных классов приобретают теоретические знания, опираясь при этом на свой личный путь (как это происходит в реальной науке), что способствует развитию у них исследовательской математической деятельности.

Таким образом, представленная программа реализации основных идей принципа фундаментальности при изучении курсов «Теоретические основы начального курса математики» и «Математика» является специальным приемом моделирования исследовательской деятельности в учебном процессе. Это в особой мере соответствует реализации принципа фундаментальности математического образования.

Литература:

1. Кипяткова О.С. Принцип фундаментальности математического курса, укрупненная дидактическая единица и комбинаторика // Совершенствование качества профессиональной подготовки будущего учителя начальных классов в области естественно-математического образования. Сборник научных статей национальной научно-практической конференции. 2019. С. 104-111.
2. Кипяткова О.С. Создание задачника для курса методики преподавания математики в начальной школе // Ярославский педагогический вестник. 2019. № 4 (109). С. 95-100.
3. Кипяткова О.С. Экспериментальная математика как способ реализации принципа фундаментальности в обучении // Герценовские чтения. Начальное образование. 2019. Т. 10. № 1. С. 297-304.
4. Шабанова М. В. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М. В. Шабанова, Р. П. Овчинникова, А. В. Ястребов и др. М : Издательский дом Академии Естествознания, 2016. 300 с.
5. Ястребов А. В. Исследовательское обучение математике в школе: монография. Ярославль: РИО ЯГПУ, 2018. 161 с.

Об авторе:

Кипяткова Оксана Сергеевна, ассистент, Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, г. Ярославль, Россия, kipyatkovaoksana@mail.ru

About the autor:

Oksana S. Kipyatkova, Assistant, Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky, Yaroslavl, Russia, kipyatkovaoksana@mail.ru

УДК 37.01, 514.13 **Костин А.В., Костина Н.Н.**

О преподавании оснований геометрии

В работе рассматриваются некоторые аспекты преподавания оснований геометрии будущим учителям математики. Предлагаются варианты наполнения курса гиперболическими и сферическими аналогами теорем евклидовой планиметрии и стереометрии. Такой подход, по мнению авторов, будет способствовать расширению кругозора и более глубокому пониманию в том числе и исходных евклидовых теорем.

Ключевые слова: подготовка учителей математики, основания геометрии, неевклидовы геометрии, теорема Менелая, медианы

Andrey V. Kostin, Natalia N. Kostina

About Teaching the Foundations of Geometry

The paper discusses some aspects of teaching the foundations of geometry to future teachers of mathematics. Options for filling the course with hyperbolic and spherical analogues of the theorems of Euclidean planimetry and stereometry are proposed. Such an approach, according to the authors, will contribute to broadening one's horizons and a deeper understanding, including the original Euclidean theorems.

Keywords: training of teachers of mathematics, foundations of geometry, non-Euclidean geometries, Menelaus' theorem, medians

При изучении оснований геометрии будущим учителям, на наш взгляд, будет весьма полезно разобрать синтетические доказательства гиперболических и сферических аналогов теорем школьной планиметрии и стереометрии. Сходства и различия содержания и методов доказательства этих теорем обогатят багаж знаний и помогут глубже понять идеи, лежащие в их основе. Даже основные теоремы геометрии треугольника, перенесённые в неевклидовы геометрии, дают большой простор для такой деятельности. Приведём пример таких теорем в геометрии Лобачевского.

Теорема 1. (Теорема Менелая для плоскости Лобачевского). *Пусть кривизна плоскости Лобачевского равна* $-\frac{1}{\sigma^2}$, *и прямая, не параллельная стороне AB треугольника ABC на этой плоскости, пересекает две его стороны AC и BC соответственно в точках* B_1 *и* A_1, *а прямую AB в точке* C_1 *, тогда*

$$\frac{sinh\left(\frac{AB_1}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{B_1C}{\sigma}\right)}\cdot\frac{sinh\left(\frac{CA_1}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{A_1B}{\sigma}\right)}\cdot\frac{sinh\left(\frac{BC_1}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{C_1A}{\sigma}\right)}=1. \quad (1)$$

Доказательство:

Для треугольников AB_1C_1, A_1B_1C и A_1BC_1: применим теорему синусов гиперболической плоскости [3]:

В треугольнике AB_1C_1 имеем: $$\frac{sinh\left(\frac{AB_1}{\sigma}\right)}{sinC_1}=\frac{sinh\left(\frac{C_1A}{\sigma}\right)}{sinB_1}\ , \quad (2)$$

аналогично, в треугольнике A_1B_1C: $\dfrac{sinh\left(\frac{CA_1}{\sigma}\right)}{sinB_1} = \dfrac{sinh\left(\frac{B_1C}{\sigma}\right)}{sinA_1}$, (3)

и в треугольнике A_1BC_1: $\dfrac{sinh\left(\frac{BC_1}{\sigma}\right)}{sinA_1} = \dfrac{sinh\left(\frac{A_1B}{\sigma}\right)}{sinC_1}$. (4)

Перемножим почленно три равенства (2), (3), (4). Получим:

$$sinh\left(\frac{AB_1}{\sigma}\right) \cdot sinh\left(\frac{CA_1}{\sigma}\right) \cdot sinh\left(\frac{BC_1}{\sigma}\right) = sinh\left(\frac{C_1A}{\sigma}\right) \cdot sinh\left(\frac{B_1C}{\sigma}\right) \cdot sinh\left(\frac{A_1B}{\sigma}\right).$$

Поделив на правую часть равенства, получим соотношение (1).

Как и в евклидовой геометрии, эта теорема имеет обратную.

Теорема 2. *Пусть в треугольнике ABC на плоскости Лобачевского точки* A_1, B_1, C_1 *лежат на прямых BC, AC, AB соответственно. Тогда, если выполняется равенство*

$$\frac{sinh\left(\frac{AB_1}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{B_1C}{\sigma}\right)} \cdot \frac{sinh\left(\frac{CA_1}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{A_1B}{\sigma}\right)} \cdot \frac{sinh\left(\frac{BC_1}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{C_1A}{\sigma}\right)} = 1,$$

то точки A_1, B_1, C_1 *лежат на одной прямой.*

Доказательство:

Обратную теорему, как и в евклидовом случае, можно доказать методом «от противного». Предположим, что при выполнении условий теоремы 2 точки A_1, B_1, C_1 не принадлежат одной прямой. Тогда прямая A_1B_1 пересечет прямую AB в точке C_2, не совпадающей с точкой C_1. Вследствие теоремы 1, для трёх точек A_1, B_1, C_2 будет выполняться соотношение

$$\frac{sinh\left(\frac{AB_1}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{B_1C}{\sigma}\right)} \cdot \frac{sinh\left(\frac{CA_1}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{A_1B}{\sigma}\right)} \cdot \frac{sinh\left(\frac{BC_2}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{C_2A}{\sigma}\right)} = 1.$$

Отсюда следует, что для двух, по сделанному предположению различных, точек C_1 и C_2 должно будет выполняться равенство:

$$\frac{sinh\left(\frac{BC_1}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{C_1A}{\sigma}\right)} = \frac{sinh\left(\frac{BC_2}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{C_2A}{\sigma}\right)}.$$

Учитывая монотонность гиперболического синуса, получим, что эти точки совпадают, а это противоречит предположению. Теорема доказана.

Опираясь на доказанные теоремы, можно доказать свойство медиан треугольника на плоскости Лобачевского.

Теорема 3. *Медианы треугольника на плоскости Лобачевского пересекаются в одной точке.*

Доказательство:

Обозначим через M_b и M_c середины сторон AC и AB треугольника ABC соответственно, а через $M = BM_b \cap CM_c$ – точку пересечения двух медиан. Для треугольника ABM_bи прямой M_cM запишем соотношение из гиперболической теоремы Менелая:

$$\frac{sinh\left(\frac{AM_c}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{M_cB}{\sigma}\right)} \cdot \frac{sinh\left(\frac{BM}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{MM_b}{\sigma}\right)} \cdot \frac{sinh\left(\frac{M_bC}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{CA}{\sigma}\right)} = 1.$$

В этом соотношении $\dfrac{sinh\left(\frac{AM_c}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{M_cB}{\sigma}\right)}$=1. Отсюда, используя свойства гиперболических функций, получим:

$$\frac{sinh\left(\frac{BM}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{MM_b}{\sigma}\right)} = \frac{sinh\left(\frac{CA}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{M_bC}{\sigma}\right)} = \frac{sinh\left(\frac{CA}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{CA}{2\sigma}\right)} = \frac{2sinh\left(\frac{CA}{2\sigma}\right)cosh\left(\frac{CA}{2\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{CA}{2\sigma}\right)} = \frac{2cosh\left(\frac{CA}{2\sigma}\right)}{1}.$$

Рассмотрим теперь медианы AM_a и BM_b. Пусть они пересекаются в точке N. Тогда, аналогично предыдущему:

$$\frac{sinh\left(\frac{BN}{\sigma}\right)}{sinh\left(\frac{NM_b}{\sigma}\right)} = \frac{2cosh\left(\frac{CA}{2\sigma}\right)}{1}.$$

Из равенства отношений следует, что точки M и N совпадают. Теорема доказана.

В сферической геометрии доказательства этих теорем аналогичны, только гиперболические функции заменяются тригонометрическими. Такого же типа теоремы и опирающиеся на них задачи можно использовать на пробных уроках при подготовке к педагогической практике [1], [2].

Литература:

1. Костин А.В. Использование имитационных технологий при подготовке будущих учителей/ А.В. Костин, Н.Н. Костина, Е.О. Миннегулова // Интернет-журнал «Мир науки». – 2016. – Т.4, №1. – С.1–7
2. Костин А.В. О геометрической подготовке будущих учителей математики и физики / А.В.Костин, Н.Н.Костина // Физико-математическое и технологическое образование: проблемы и перспективы развития : материалы IV Международной научно-методической конференции / Отв. ред. С. В. Лозовенко [Электронное издание]. – Москва : МПГУ, 2019. – С. 577–579
3. Несторович Н.М. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. – М.-Л.: ГТТИ. 1951

Об авторах:

Костин Андрей Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент, Елабужский институт Казанского федерального университета, Елабуга, Россия

Костина Наталья Николаевна, андидат физико-математических наук, доцент, Елабужский институт Казанского федерального университета, Елабуга, Россия

About the autors:

Andrey V. Kostin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Yelabuga Institute of Kazan Federal University, Yelabuga, Russia

Natalia N. Kostina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Yelabuga Institute of Kazan Federal University, Yelabuga, Russia

УДК 378

Налимова И.В.

Возможности кейс-технологии в процессе подготовки будущего учителя к обучению математике

Статья посвящена вопросам профессиональной подготовки будущего учителя, рассмотрена одна из современных технологий в подготовке учителя – кейс-технология, приводятся примеры различных кейсов, которые могут быть использованы на занятиях по методике обучения математике.

Ключевые слова: профессиональная подготовка, кейс-технология, обучение математике

Irina Vl. Nalimova

Possibilities of Case Technology in the Process of Preparing a Future Teacher for Teaching Mathematics

The article is devoted to the issues of professional training of the future teacher, one of the modern technologies in teacher training – case technology is considered, examples of various cases that can be used in the classroom on the methodology of teaching mathematics are given.

Keywords: professional training, case technology, teaching mathematics

Понятие «профессиональная компетентность» в системе подготовки будущего специалиста на современном этапе становится основным, определяющим как содержание учебных курсов, так и технологию обучения в педагогическом университете. Современный учитель должен уметь организовать так учебную деятельность обучающегося в общеобразовательной школе, чтобы ученик мог самостоятельно «открыть» новые знания.

Курс методики обучения математике на педагогическом факультете Ярославского педагогического университета связан междисциплинарными связями с курсами: методика обучения и воспитания в области начального образования; математика; информационные технологии в образовании; основы информатики в начальном обучении; теория и практика решения математических задач в интерактивных средах; элементы математической статистики; математическая логика; региональный компонент естественно-математического образования; оценка достижений младшего школьника по математике. Освоение программы подготовки будущего учителя начальных классов предполагает, что теоретические и практические занятия, а также педагогическая практика представляют единую систему. Причем теоретические сведения должны быть получены студентами не только на лекциях и самостоятельной работе по методике обучения математике, но во всех выше перечисленных курсах. Дисциплина «Методика обучения математики» выступает как обобщающая, целью которой служит формирование педагогической деятельности будущих учителей начальных классов к обучению математике.

Одна из основных задач курса – овладение умениями отбора содержания, методов, форм и средств обучения младших школьников математике. На наш взгляд, наиболее эффективным методом решения указанной выше задачи можно считать использование кейс-технологии в подготовке будущего учителя.

Кейс-технология – это метод активного анализа конкретных задач-ситуаций (кейсов). Поскольку кейсы имеют различную структуру, то они позволяют рассмотреть реальные практические задачи методического характера с разных точек зрения, тем самым, разрешая ситуации, студент учится разрабатывать проблемы и находить их решение. При поиске выхода из сложившейся ситуации будущий учитель работает с информацией. При этом акцент делается не на получение готовых знаний, а на их выработку, сотворчество преподавателя и студента. Кейсы отличаются от задач, используемых при проведении занятий. Обучение с помощью кейсов помогает студентам приобрести широкий набор как общепрофессиональных, так и профессиональных компетенций. Долгоруков А. выделяет иллюстративные учебные ситуации – кейсы, учебные ситуации – кейсы с формированием проблемы, учебные ситуации – кейсы без формирования проблемы, прикладные упражнения, в которых описывается конкретная сложившаяся ситуация [1].

На начальном этапе изучения методических дисциплин студенты разрешают иллюстративные учебные ситуации-кейсы. Цель этих ситуаций на определенном практическом материале (анализе фрагмента урока или внеурочного занятия) обучить студентов алгоритму принятия правильного решения в определенной ситуации (выбор оптимального метода обучения, формы организации деятельности учителя или учащихся).

Приведем пример такого задания.

Задание. Учитель на этапе урока актуализации знаний в первом классе предлагает ученикам арифметический диктант (этап данного урока демонстрируется на экране). После проверки ответов диктанта ученикам задают вопросы:

- Какое число среди записанных ответов самое большое?
- Какое число в ряду чисел находится перед этим числом?
- Назовите сумму самого маленького записанного числа и самого большого.

И далее, учителем ставится учебная задача, связанная с темой урока «Прием сложения чисел по частям».

Задание студентам: оцените содержание этапа актуализации знаний на уроке, на какие положения учитель опирается при подборе заданий для этого этапа. Опишите возможные способы работы в классе по теме урока.

После обсуждения вариантов, предлагаемых студентами, обучающиеся продолжают просмотр видео урока и выполняют его анализ.

Другая группа кейсов – учебные ситуации – кейсы без формирования проблемы, в которых описывается учебная ситуация, где проблема четко не выявлена, а цель такого кейса – самостоятельно выявить проблему, указать альтернативные пути ее решения с анализом наличных ресурсов. Приведем пример.

Задание. Познакомьтесь со статистическими данными о численности населения городов Ярославской области: население города Тутаева 40 400 человек, Переславля-Залесского – 39 460 человек, Углича – 32 300 человек, Рыбинска – 191 840 человек, Данилова -14 980 человек, Мышкина -5 775 человек.

Задание студентам: используя данные, составьте 4 различные логические задачи для учеников 1, 2, 3 и 4 классов. Приведите рассуждения учеников при решении задач. Найдите возможность применения на уроках математики статистической информации для формирования познавательных универсальных действий. Какие трудности могут возникнуть у обучающихся при решении логических задач? Предложите варианты выхода в этой ситуации.

В педагогической практике учитель часто сталкивается с необходимостью выбора наиболее эффективного способа организации деятельности ученика. К поиску пути разрешения конкретной методической проблемы возможно подготовить будущего педагога, предлагая ему определенные кейс-задания.

Приведем пример такого кейса.

Задание. Ученикам второго класса было предложено решить две задачи. Первая задача: «Длина реки Юхоть 75 км, а длина реки Лахость на 21 км больше. Какова длина реки Лахость?» Вторая задача: «Длина реки Юхоть 75 км, это на 21 км меньше, чем реки Лахость. Какова длина реки Лахость?». Для организации работы над задачами учитель может использовать различные приемы.

Первый вариант работы: на уроке фронтально разобрали и решили первую задачу. Вторую задачу ученики решали на уроке самостоятельно.

Второй вариант работы: первую задачу ученики решали в классе, вторую учитель задал ученикам на дом.

При проверке домашнего задания на следующем уроке, учитель предлагает вспомнить решение первой задачи и сравнить ее с домашней.

Третий вариант: ученики прочитали сразу текст двух задач. После ознакомления с текстом задач, учащимся предлагается сравнить тексты задач: чем они похожи и отличаются. Решаются задачи.

Задание студентам: определите, какой вариант организации работы целесообразнее использовать? Какой прием обучения Вы будете применять, работая с текстом задач? Опишите фрагмент урока.

Последние два примера отражают реализацию интеграционных связей в профессиональной подготовке учителя, о чем было изложено в статье [2].

Кейс – задания возможно применить для проверки уровня сформированности профессиональных компетенций, именно такие задания составили основу контрольно-измерительных материалов.

Систематическое и целенаправленное применение кейс-технологии обеспечивает развитие у студентов умения обучать учащихся по образовательным стандартам.

Литература:

1. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально-ориентированного обучения [Электронный ресурс] – режим доступа. – http://www.vshu.ru/lections.php?tab_id=3&a=info&id=2600
2. Налимова, И.В., Бекиш, О.С. Пути реализации интеграционных связей при изучении естественно-математических дисциплин в начальной школе // Начальное общее образование: реализация ФГОС, новые подходы: материалы межрегиональной научно-практической конференции. – Ярославль: РИО ЯГПУ, 2016 – С. 43-46.

Об авторе:

Налимова Ирина Владимировна, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой, Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, г. Ярославль, Россия, inalimova@yandex.ru

About the autor:

Irina Vl. Nalimova, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department, Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky, Yaroslavl, Russia, inalimova@yandex.ru

УДК 373.3

Налимова И.В., Лошманова Д.Д.

Вопросы преемственности в изучении элементов алгебры в начальной и основной школе

Статья посвящена реализации принципа преемственности между начальной и основной школой при изучении элементов алгебры, показаны основные подходы к обучению решению уравнений, обозначены методические рекомендации.

Ключевые слова: обучение математике, преемственность, элементы алгебры, уравнение

Irina Vl. Nalimova, Daria D. Loshmanova

Issues of Continuity in Studying the Elements of Algebra in the Primary and Basic School

The article is devoted to the implementation of the principle of continuity between primary and secondary schools in the study of elements of algebra, the main approaches to teaching the solution of equations are shown, and methodological recommendations are indicated.

Keywords: teaching mathematics, continuity, elements of algebra, equation

Педагогов, как прошлого, так и современных интересовали проблемы организации непрерывного образования, что непосредственно связано с вопросами преемственности.

Преемственность разными авторами понимается по-разному. Мы будем рассматривать подход А.В. Батаршева [1]. Данный подход подразумевает последовательный переход от одной ступени образования к другой, при этом с одной стороны сохраняются содержание, формы и методы обучения, с другой – содержание материала и технологии его изучения претерпевают изменения, что вполне естественно, так как меняются возрастные особенности обучающихся.

С введением образовательных стандартов были пересмотрены программы обучения начальной и основной общеобразовательной школы и на сегодняшний день проблема преемственности содержания учебного предмета «Математика» актуальна. В содержании начального курса математики выделяют основные разделы – арифметический материал, вопросы геометрии, элементы алгебры и величины.

Алгебраический материал в начальной школе включает знакомство учащихся с понятиями «математическое выражение», «числовое выражение», «буквенное выражение», «равенство», «неравенство», «уравнение».

С первых дней обучения начинается работа по формированию у учащихся понятий «равенство» и «неравенство». Содержание понятий «равенство» и «неравенство» ученикам раскрывают через действия с множествами предметов, учат сравнивать два множества по количеству, используя прием взаимнооднозначного соответствия. Таким образом, появляются первые числовые равенства и неравенства: $5 = 5$, $5 > 4$, $5 < 6$. Учитель может попросить учеников доказать, верны ли записи: $7>4$, $9<7$. Младший школьник для доказательства будет применять предметное моделирование.

Позднее в первом классе, организуя работу в парах, при выполнении вычислений учащиеся показывают своему однокласснику, верный или неверный результат получили, находя значение выражения – $4 + 3 = 7$. По окончании первого года обучения ученик может оперировать знаниями о числовом выражении, верном и неверном числовом равенстве.

Содержание алгебраического материала в начальных классах полностью подчинено становлению арифметических знаний и умений. При формировании вычислительных умений ученики знакомятся со свойствами операций сложения и умножения, а также с правилами о взаимосвязи между компонентами и результатами действий. Эти знания положены в основу способов решения уравнений и неравенств в основной школе.

Анализ педагогических исследований и практического опыта показывает, что наиболее трудным для обучающихся как начальных, так и 5 -6 классов является понятие переменной. В начальном курсе математики педагогу стоит обратить внимание на формирование смысла буквы как обобщенного символа. В одной из школ г. Ярославля была проведена диагностика, цель которой выявить уровень формирования приема обобщения учащимися третьего класса. Одно из заданий диагностики предполагало, найти значения выражений и обобщить при помощи буквы наблюдаемую закономерность, последнее вызвало затруднение у большинства учеников класса. Таким образом, возникает необходимость уже в начальных классах проводить систематическую работу по развитию умения обобщать.

Закономерность формирования обобщенного приема решения уравнений с одним неизвестным вытекает из следующего положения: для того, чтобы решить любое уравнение с одной переменной, учащийся должен знать, во-первых, правило или алгоритмы решения простейших уравнений данного вида и, во-вторых, правила выполнения равносильных преобразований, с помощью которых данное уравнение можно привести к простейшим.

Следовательно, решение каждого уравнения складывается из двух основных частей: преобразование данного уравнения к простейшим; решение простейших уравнений по известным правилам. При этом если вторая часть решения является алгоритмической, то первая – в значительной степени эвристической. Именно правильный выбор преобразований представляет наибольшую трудность для учащихся. Обучение решению уравнений начинается с простейших их видов, и программа обуславливает постепенное накопление как их видов, так и «фонда» равносильных преобразований.

В этом направлении мы предлагаем строить процесс формирования обобщенных приемов решения уравнений. Причем, эту работу следует начинать в начальных классах и продолжить в 5-6 классах.

Обобщение способов деятельности учащихся при решении уравнений происходит постепенно и вполне доступно пятиклассникам.

Выделим составляющие процесса обобщения различных приемов решения уравнений:

- решение простейших уравнений данного вида;
- вывод правила решения и запоминание его;
- решение несложных уравнений данного вида, не являющихся простейшими;
- анализ действий, необходимых для их решения;
- формулировка частного приема решения;
- применение полученного частного приема по образцу, в сходных ситуациях;
- сравнение полученных частных приемов, выделение общих действий в их составе и формулировка обобщенного приема решения.

Рассмотрим, каким образом, можно организовать работу при обучении решению уравнений первой степени с одним неизвестным.

Аналогично проводится работа по ознакомлению учеников с решением других уравнений.

Итак, основная задача работы с уравнениями – не формирование умения их решать, а формирование осознания общего пути преобразования уравнения от сложного к более простому. Уровень сложности уравнений зависит не столько от материала учебника, сколько от особенностей класса. Учитель сам определяет этот уровень.

В курсе математики начальных классов выделяют способы решения уравнений: первый – подбор значений переменной, второй – основанный на зависимостях между компонентами и результатами арифметических действий. Часто учителя начальной школы игнорируют первый способ решения, но способ подбора формирует у учащегося умение анализировать, рассуждать и доказывать, что подобранное число является корнем уравнения. Кроме того, этот способ может быть перенесен и на выполнение других, не связанных с уравнениями заданий.

Таким образом, успешная работа по изучению элементов алгебры будет зависеть от продуманной пропедевтической работы в начальной школе, которая включает раскрытие содержание понятий, а также формирование у младших школьников умения обобщать, ознакомление с приемами решения уравнений. В 5-6 классах целесообразно продолжить эту работу и с усложнением структуры уравнений познакомить с обобщенным способом решения линейных уравнений. Основная цель такой работы организация непрерывного образования, что является необходимым условием успешного усвоения элементов алгебры.

Деятельность учителя	Деятельность учащихся
Ставит учебную задачу: определить сходство и различие уравнений – $4·(x + 2) = 32$ и $2·(x + 3) + 5 = 17$	Сравнивают уравнения и отмечают, что второе уравнение содержит два арифметических действия.
Задает ученикам вопросы: «Какие преобразования надо сделать, чтобы второе уравнение стало «похожим» на первое? Каким свойством равенств можно воспользоваться?»	Отвечают на вопрос: «Чтобы преобразовать второе уравнение надо из правой и левой части вычесть 5: $2·(x + 3) + 5 – 5 = 17 – 5$ $2·(x + 3) = 12$.
Предлагает выполнить преобразования полученного уравнения.	Замечают возможность двух способов преобразования: *1 способ:* $2·(x + 3) : 2 = 12 : 2$ $x + 3 = 6$ *2 способ:* $2·x + 2·3 = 12$ $2·x + 6 = 12$
Подводит итог: «Получили уравнение, в котором неизвестно слагаемое, решите это уравнение».	Решают уравнение: *1 способ:* $x = 6 – 3$ $x = 3$ *2 способ:* $2 · x = 12 – 6$ $2 · x = 6$ $x = 6 : 2$ $x = 3$
Предлагает выполнить проверку.	Проверка: $2 · (3 + 3) + 5 = 17$ $2 · 6 + 5 = 17$ $17=17$
Учитель делает обобщение: «Чтобы решить уравнение надо: - рассмотреть уравнение, отметить его особенности; - установить, какие преобразования можно сделать, используя свойства равенств и законы действий; - упростить уравнение; - найти неизвестное число; - записать ответ; - выполнить проверку».	Ученики, применяя это правило, решают уравнения: $(k + 3) · 5 – 34 = 31$ $(a + 4) · 3 + 12 = 24$.

Литература:

1. Батаршев А.В. Педагогическая система преемственности обучения в общеобразовательной и профессиональной школе / А.В. Батаршев. – СПб.: Питер, 2010. – 90 с.

Об авторах:

Налимова Ирина Владимировна, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой, Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, г. Ярославль, Россия, inalimova@yandex.ru

Лошманова Дарья Дмитриевна, студент, Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д. Ушинского, г. Ярославль, Россия

About the autors:

Irina Vl. Nalimova, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department, Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky, Yaroslavl, Russia, inalimova@yandex.ru

УДК 372.851
Решетникова С.Л.

Использование контекстных задач на уроках математики в основной школе

Актуальность данной темы обусловлена необходимостью к использованию контекстных задач на уроках математики в основной школе с целью повышению уровня общего образования среди учащихся в ближайшем будущем. В связи с этим, данная статья направлена на выявление этапов, из которых состоит процесс решения контекстной задачи, раскрытие роли учителя в этих этапах, детальное описание последовательности действий направленных на результативное обучение решению контекстных задач, определение факторов, влияющих на успешность обучения в школе, предоставить пример создания и решения контекстной задачи по математике. В связи с этим, для реализации поставленной задачи были выбраны следующие исследовательские методы: системный анализ, логический анализ, сравнительный метод, методы синтеза и дедукции, метод классификации. В статье представлены результаты в виде списков и таблицы, раскрыты этапы, из которых состоит процесс решения контекстной задачи, раскрыта роль учителя в этих этапах, детально описана последовательность действий, направленная на результативное обучение решению контекстных задач, определены факторы, влияющие на успешность обучения в школе, предоставлен пример создания и решения контекстной задачи по математике. Материалы статьи представляют практическую ценность для преподавателей и студентов педагогических университетов математических специальностей, учителей основных школ, работников Министерства Образования Республики Казахстан.

Ключевые слова: создание контекстной задачи по математике; факторы, влияющие на обучение школьника; программа обучения средней школы; учебные материалы; изучение математики

Svetlana L. Reshetnikova

The use of contextual tasks on the Math lessons in basic school

The relevance of this topic is due to the need to train future teachers of mathematics to use contextual tasks in mathematics lessons in basic schools in order to improve the level of general education among students in the near future. In this regard, this article is aimed at identifying the stages which comprise the process of solving a contextual problem, as well as the aim is to reveal the role of a teacher in these stages, to give a detailed description of the sequence of actions aimed at effective learning to solve contextual problems, to determine the factors that affect the success of schooling, to provide an example of creating and solving a contextual problem in mathematics. This study set the goal to study ways to prepare future mathematics teachers to use contextual problems in mathematics lessons in school. In this regard, the following research methods were chosen to implement the task: system analysis, logical analysis, comparative method, synthesis and deduction methods, and classification method. The article presents the results in the form of lists and tables, reveals the stages that comprise the process of solving a contextual problem, reveals the role of a teacher in these stages, describes in detail the sequence of actions aimed at effective learning to solve contextual problems, identifies the factors that affect the success of schooling. An example of creating and solving a contextual problem in mathematics is also provided. The materials of the article are of practical value for teachers and students of pedagogical universities of mathematical specialties, teachers of basic schools, employees of the Ministry of Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: creation of a contextual problem in mathematics; factors influencing student learning; secondary school curriculum; educational materials; the study of mathematics

Программы обучения учителей математики должны соответствовать меняющимся ожиданиям и стандартам в отношении учебной программы и уровня аккредитации учебного заведения. На недавно прошедшем II съезде учителей математики «Математическое образование в школе: состояние, проблемы, рекомендации», который состоялся в г. Караганде, глава МОН сообщил, что в стране будет проведена реформа с принятием концепции школьного математического образования.

На площадке республиканского съезда учителей математики выступили академики, профессора вузов, педагоги школ, методисты, которые обозначили главные достижения и недостатки математического образования в стране. Коснулись таких актуальных тем, как подготовка учителей математики.

В настоящее время в Казахстане действует специально разработанная Государственная программа развития науки и образования, которая рассчитана на период 2020-2025 гг. В ней отмечено, что педагоги зачастую не учат своих подопечных применению полученных на уроках знаний в жизни, реальных ситуациях. Помимо этого, в вышеупомянутой Государственной программе отмечается, что поднятие уровня знаний детей в области математики является одной из важнейших образовательных задач.

По этой причине, специалистами было предложено широкое применение на занятиях по математике контекстных задач, именно этим и обуславливается высокая степень актуальности данного исследования.

Сегодня в научной литературе уже существует достаточно большое количество работ, посвященных контекстным задачам: «использование методов математического моделирования» [1,с.30-32] , «роль контекстных задач в проблеме оценки уровня овладения ребенком главными математическими концепциями» [2,с.65-67]; «проведение анализа креативного потенциала личности на основе решения контекстных задач» [3,с.110-113]; «формирование у школьников необходимого уровня математической компетенции» [4,с.54-65]; «обучение детей функциональным умениям и решением реально существующих проблем на практике» [5,с.19-30], «формирование и оценка математической грамотности школьников [6,с.113-135] и т.д.

Согласно результатам тестирования PISA-2018, которое направлено на оценку уровня компетентности населения страны в различных сферах научного знания (гуманитарные, математические, естественнонаучные), показатели Казахстана за последние несколько лет в значительной степени снизились. Особо необходимо отметить, что средний результат по математике за последние три года упал на 57 баллов. Одновременно с этим, исследования, проведенные с учениками начальных классов, указывают на то, что они обладают достаточно хорошими знаниями. Таким образом, можно сделать вывод, что существует проблема их преемственности, когда ребенок переходит из начальной в основную школу. В первую очередь это связано с недостаточной степенью разработки средств, форм и методов реализации учебного процесса.

«Контекстное обучение» предусматривает использование контекстных заданий. Контекстные задания, которые предлагаются на уроках математики школьникам, предполагают описание реальных ситуаций, возникающих в жизни. Дети должны решить их при помощи тех математических умений, навыков и знаний, которыми они обладают.

Если проанализировать ЕГЭ и ОГЭ по математике, ЕНТ и МОДО («Мониторинг образовательных достижений обучающихся»), можно увидеть, что здесь часто используются задания с содержанием практической направленности. Зачастую дети не могут понять, как изученные правила соотносятся с контекстом даже в несложных заданиях. Ввиду этого, школьные занятия должны включать разбор подобных заданий.

Изучив учебники по математике, которые в настоящее время используются в школах Казахстана, можно заметить, что подавляющее количество задач направлены на развитие у детей навыков и умений по конкретной теме. Лишь небольшое число заданий предполагает совершенствование математической грамотности.

Следующие элементы составляют основу для развития математической грамотности ребенка:

- содержание математического образования, которое применяется для формирования задач;
- контекст, в котором содержится возникшая проблема;
- активная мыслительная деятельность, которая важная для соотношения математического решения задачи и контекста обозначенной проблемы.

Чтобы преподаватель получил возможность оценить уровень математической компетенции детей, необходимо сформировать специальные задачи. В настоящее время достаточно много специалистов ведут работу в данном направлении. Однако, разные авторы применяют в своих трудах собственные определения для подобного вида заданий: компетентностно-ориентированные, практико-направленные, сюжетные, ситуационные, учебно-практические, контекстные и т.д.

Современные образовательные стандарты предполагают наличие у школьников определенных практико-ориентированных компетенций. Дети получают возможность понять всю прикладную значимость математики посредством решения контекстных задач. Такие задачи повышают уровень мотивации к изучению математики. В ходе формирования комплекса контекстных задач, которые будут использоваться преподавателем в ходе занятий по математике, необходимо руководствоваться следующими принципами:

1) Важно использовать такие задания, которые предполагают применение детьми знаний, полученных в ходе изучения текущей и прошлых тем. В этом случае появляется возможность оценить уровень усвоения материала, закрепить и повторить его, а также научить подопечных использовать приобретенные навыки в реальных ситуациях.
2) Школьникам необходимо предлагать такие задачи, которые способствуют пониманию различных рукотворных и природных явлений. Подобные задания должны связывать жизненную практику и преподавание, отличаться видами и типами.
3) Задания важно подбирать таким образом, чтобы дети сталкивались с новыми, прежде неизученными явлениями. Таким образом, задача выступает в качестве связующего элемента, который способствует осмыслению детьми нового материала, посредством уже изученного.
4) Количество предлагаемых задач должно соответствовать имеющемуся времени. У преподавателя должна быть возможность использовать индивидуальный подход к каждому ребенку в зависимости от его уровня развития. Уровень нагрузки, формируемый за счет решения контекстных задач, не должен негативно сказываться на иных видах учебной деятельности.
5) Желательно, чтобы задача, содержание которой базируется на реальных жизненных ситуациях, предполагала наличие нескольких решений. При этом одно из них будет максимально соответствовать этой ситуации (например, полученный результат требует округления).

Контекстные задания могут быть использованы на различных стадиях урока. Это зависит от методов осуществления преподавательской деятельности и желаемых результатов, которых необходимо достигнуть.

Контекст задачи представляет собой элементы окружающей среды и их специфику, которая описана в границах определенной ситуации. Подобные ситуации максимально приближены к реальным. Для их решения может требоваться различный уровень математизации. Используются следующие контексты: научная деятельность, профессиональная деятельности или образование, личная жизнь, общественная жизнь.

Основываясь на этом, можно выделить основные стадии решения подобных задач. Преподаватель здесь выступает в качестве наставника, который занимается глубоким разбором каждого задания и демонстрирует детям реализацию последовательных действий, необходимых для решения подобных задач. Решение контекстных задач предполагает наличие следующих последовательных стадий:

- чувства;
- наблюдение;
- мышление;
- действие.

Необходимо отметить, что все перечисленные выше процессы связаны между собой и способствуют реализации качественного обучения решения контекстных задач на практике.

Все последующее обучение необходимо формировать на базе следующей модели: преподаватель предоставляет всю необходимую информацию и предлагает детям некоторый комплекс задач в качестве домашней работы; дети осуществляют самостоятельную работу и решают их; в случае необходимости, обучающийся может оставлять заметки на полях в ходе решения задач; преподаватель проверяет домашнюю работу, выявляет имеющиеся недопонимания и пробелы в знаниях детей, оценивает решение; преподаватель возвращается к изучению наименее усвоенных тем, предварительно подготовив соответствующие материалы; вносит коррективы в комплекс задач, который предлагается школьникам для самостоятельного решения на дому.

В качестве контекстных заданий можно использовать задачи, которые применяются в материалах итоговой аттестации средней и основной школы, исследованиях TIMSS и тестах PISA. Современные учебники по математике содержат небольшое количество подобных задач, однако преподаватель может изменить их. Для этого можно подобрать реальную ситуацию из жизни под определенную задачу, либо выделить математические факты в соответствии с имеющейся реальной ситуацией.

Например, когда дети проходят на уроках математики тему «Измерения площади», можно предложить выяснить, сколько побелки понадобится для того, чтобы обработать потолок в классе. Перед тем, как переходить к решению контекстной задачи, необходимо разобрать несколько заданий в учебниках.

Например, в учебнике предлагается задача: «Потолок в классе был обработан побелкой два раза. При первичной обработке было затрачено 200 г. побелки на один квадратный метр, а при вторичной – 150 г. Выясните, сколько побелки понадобилось, если длина аудитории составляет 20 метров, а ширина – 14 метров». Подобные задачи могут выступать в качестве основного источника информации. Преподаватель способен менять условия так, чтобы они были максимально приближены к реальной ситуации.

Довольно распространенным методом, с помощью которого можно «трансформировать» задачу, является постановка дополнительных вопросов.

Рассматриваемая в задаче проблема должна максимально соответствовать психологической и возрастной специфике учеников, пробуждать в них интерес к получению новых знаний. Текст каждого задания должен включать необходимые и избыточные сведения. Какая-то часть этих сведений может быть закреплена в преамбуле. Если преподаватель предлагает решение нескольких задач, они должны обладать определенной взаимосвязью, необязательно линейной.

Как сказано выше, задача может иметь несколько решений. Таким образом, решение контекстных задач способствует и осуществлению «открытого подхода» к обучению математике ([7, с. 126-130.], [8, с. 146–150]).

Литература:

1. Константинова Т.Н. Контекстные задачи как средство формирования приемов математического моделирования у учащихся общеобразовательной школы / Т.Н. Константинова // Мир науки, культуры, образования. – 2014. – № 1. – С. 30-32.
2. Далингер, В.А. Контекстные задачи по математике как средство диагностики уровня сформированности предметной компетенции у студентов инженерной специальности / В.А. Далингер, О.В. Янущик // Высшее образование сегодня. – 2011. – № 10. – С. 65-67.
3. Мясникова О.М. Использование контекстных задач при оценивании метапредметных результатов / О.М. Мясникова // Пермский педагогический журнал. – 2014. – № 5. – С. 110-113.
4. Рыбалко Н.А. Контекстные задачи по курсу теории вероятностей и математической статистики, их роль и место в формировании математической компетенции / Н.А. Рыбалко // Реализация компетентностного подхода в процессе обучения математике: коллективная монография / Соликамск: СГПИ. – Изд. Соликамский государственный педагогический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «ПГНИУ». – 2014. – С. 54-65.
5. Денищева, Л.О. Проверка компетентности выпускников средней школы при оценке образовательных достижений по математике / Л.О. Денищева, Ю.А. Глазков, К.А. Краснянская // Математика в школе. – 2008. – № 6. – С. 19-30.
6. Денищева, Л. О. Особенности формирования и оценки математической грамотности школьников / Л.О. Денищева, Н.В. Савинцева, И.С. Сафуанов, А.В. Ушаков, В.А. Чугунов, Ю.А. Семеняченко // Наука и образование сегодня. – 2021. – Т. 11. – № 4. – С. 113-135.
7. Сафуанов И.С. Открытый подход к обучению математике // Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи. Материалы I Всероссийской научно-практической конференции. – Майкоп: Издательство Адыгейского государственного университета. – 2015. – С. 126-130.

8. Сафуанова А. М. «Открытый подход» и «исследование уроков» – пути совершенствования математического образования / А. М. Сафуанова, И.С. Сафуанов // Нижегородское образование. – 2016. – № 2. – С. 146–150.

Об авторе:

Решетникова Светлана Леонидовна, аспирантка, школа-гимназия № 6 имени Абая Кунанбаева, г. Степногорск, Республика Казахстан, swet69@mail.ru

About the autor:

Svetlana L. Reshetnikova, postgraduate student, school-gymnasium No. 6 named after Abay Kunanbaev, Stepnogorsk, Republic of Kazakhstan, swet69@mail.ru

УДК 51-71

Туктамышов Н.К.

Проблема понимания в математике

Целью статьи является анализ феномена понимания в математике. В работе вводятся понятия математической картины мира и индивидуальной математической картины мира. Отличительной особенностью работы является то, что в ней понимание в математике трактуется как процесс формирования индивидуальной математической картины мира (ИМКМ). Выделен базовый элемент ИМКМ и его структура. В работе принято, что целостное и связное представление базового элемента ИМКМ означает понимание математического понятия.

Ключевые слова: понимание, образ, личностный смысл, значение, математическое понятие

Nail K. Tuktamyshov

The Problem of Understanding in Mathematics

The aim of the article is to analyse the phenomenon of understanding in mathematics. The notions of mathematical picture of the world and individual mathematical picture of the world are introduced. The peculiarity of the work is that understanding in mathematics is treated as a process of individual mathematical picture of the world (IMPW) formation. The basic element of IMPW and its structure are distinguished. It is accepted in the work that the holistic and coherent representation of the basic element of IMPW means understanding of mathematical concept.

Keywords: understanding, image, personal meaning, meaning, mathematical concept

Проблемы, связанные с пониманием в математике, становились предметом дискуссий на многих конференциях и в многочисленных статьях. Так, Skemp [17] понимание разделяет на две категории: relational understanding, которое отвечает на вопрос «знать что и почему», и instrumental understanding, отвечающий на вопрос «как». Skemp в своих исследованиях понимание определяет в терминах «knowings» и в конечном счёте сводит к понятию способности субъекта ассоциировать с «ассимиляцией» с «подходящей схемой», под которой он понимает группу взаимодействующих понятий. В использовании понимания в смысле Skempa возникают трудности, связанные с идентификацией данной проблемы или задачи с типом известных проблем или задач. Трудность состоит в том, что запоминание большого числа типовых задач уже составляет проблему. Важным шагом в исследовании категории понимания был сделан Tall и Vinner [18], которые ввели понятие concept image, представляющее собой некоторую когнитивную структуру, имеющую отношение к данному понятию и включающую в себя ментальные картины и ассоциированные с этим понятием свойства и отношения. Concept image описывает всеобщую (total) когнитивную структуру, несущую в себе определение математического понятия, являющегося реконструкцией студентом понятия, то есть понятия данного студентом своими словами. В силу этого concept image в общем случае несёт потенциальный когнитивный конфликт, который может проявиться позже. Sierpinska [16] предлагает методологию «актов понимания» (acts of understanding), обосновывая его с философской точки зрения, выявляет категории актов понимания. S.Pirie и T. Kieren [13] понимание представляют себе как динамический, трансцендентный, рекурсивный, нелинейный процесс.

Как видно, имеются разные точки зрения на понимание, делающие акцент на различные аспекты: образные представления, умение проводить формализацию, построение алгоритмов решения, умение строить правильные ассоциации и т.д., однако, общего консенсуса, касающегося понимания в математике, нет. Здесь предлагается новый подход к решению указанной проблемы, основанный на использовании концепта картины мира [7], учитывающего ценностные аспекты понимания и мотивы.

Очевидно, что субъект не может идентифицировать, классифицировать, назвать какой-либо объект, если у него нет соответствующей системы, образа мира (по терминологии А.Н. Леонтьева). Обучение математике – это построение в сознании индивида соответствующей математической картины мира (МКМ), то есть сети взаимосвязанных понятий. Цель данной работы состоит в исследовании понимания как формирования математической картины мира обучающегося.

«Научная картина мира» и особенно «картина мира» имеют различное толкование. В российской философско-методологической литературе термин «картина мира» применяется не только для обозначения мировоззрения (в зарубежной философии чаще всего термин «картина мира» применяется для обозначения мировоззрения (Дж. Холтон,[9]), но и в более узком смысле тогда, когда речь заходит о научных онтология [7]. В дальнейшем будем исходить из определения: «Картина мира – общие представления о мире, его устройстве, типах объектов и их взаимосвязях» [7]. Все картины мира различаются по двум главным признакам: 1) степени общности и 2) средства моделирования реальности [3].

Объекты МКМ можно представить как иерархию систем абстрактных идеализированных объектов и отношений (числовые системы, геометрические фигуры, функции, равенства и т.д.), выступающих в единстве их идеального содержания и материальной, знаковой структуры. Всякая математическая теория так или иначе отражает закономерности реального мира и выражает определенный тип фундаментальных взаимосвязей с объектами мира через математические модели. В сфере математического образования МКМ позволяет: выделить фундаментальные понятия теории в их взаимосвязи с другими математическими теориями; формировать математическую деятельность обучающихся [2]. Понятия и факты математики квазиэмпиричны, математика открывает, а не изобретает истины. Более того, как утверждает М.Тегмарк [19], наша физическая реальность является в определенном смысле математической, а все математические структуры, которые можно вычислить, существуют. Объективная математическая картина мира представляет собой «горизонт систематизации знаний» [7] в математике, фиксирующий целостное видение предмета данной науки. Математическая картина мира представляет для обучающегося внешний мир, эталон, базу объективных математических данных; она участвует в формировании математических понятий и отношений у обучающихся.

Существует объективная картина мира, но проблема в обучении состоит в том, чтобы с той или иной глубиной математическая картины мира формировалась в сознании обучающегося. Таким образом, речь идет о формировании индивидуальной математической картины мира (ИМКМ). Формирование ИМКМ означает, что обучающийся может выделить основные понятия изучаемой области математики, способен их понять; выстроить сеть, связывающую выделенные основные математические понятия. Для понимания работы этой сети, то есть процесса формирования математической картины мира субъекта, необходимо выделение простейшего элемента этой сети (узловой точки сети, базовых понятий), выявить его структуру и выяснить механизмы связей между этими элементами.

В качестве психологической основы в построении элемента ИМКМ легли идеи о культурно-историческом подходе Л.С Выготского [1], теория деятельности А.Н. Леонтьева [4], а также идеи исследователей искусственного интеллекта [5].

Для последовательного развития картины мира в сознании студентов, как отмечает А.Н. Леонтьев, необходимо выполнение условий. Во-первых необходима «ориентировочная основа» поведения, то есть обучающийся должен иметь в качестве образа, основы некоторый эталон во внешнем мире, и определенный и так или иначе связанный с познаваемым объектом образ в сознании. Из первого условия вытекает второе условие, заключающееся в том, что формирование того или иного образа создаёт необходимость соответствующего ориентирующего, управляющего, опосредующего образ его в предметном мире. Это в общем случае учитель. Построение математической картины мира видится как дидактическая необходимость.

По мнению Л.С. Выготского [1] процесс мышления и трансформации человеческого сознания связаны с культурно-историческим фактором. А указанные процессы осуществляются с помощью знаковой системы и сопутствующей ей идеи семиотического посредничества [14]. Обучение и реализация когнитивных функций может происходить только в среде культуры, в которой определяющую роль играет знак (материальный объект, его свойство, или некоторое явление), который для обучающихся выступает в качестве указателя на смысл объекта, события или отношения [10]. Язык математики представляет собой семиотическую систему, основной особенностью которой является однозначное, не допускающее двусмысленностей, представление математических объектов.

Каждый математический объект, являясь результатом многоуровневой абстракции, репрезентируется специальным знаком, образующим вместе с правилом действий над ними математический язык. Знаково-символическое обозначение математического объекта или понятия – его имя, а сам объект – денотат имени. Денотат имени представляет собой в общем случае мысленный образ, в котором отражён как материальный мир, так и деятельность познающего субъекта, учитывающий его мотивационно-ценностный выбор. Ясно, что необходимым условием построения, обучающимся своей математической картины мира, является знание содержания имён знаков изучаемых объектов, их значений, а также наличие мотивации. Любой знак обозначает понятие и связывает в единое целое концепт и имя, поэтому выяснение структуры знака позволяет выявить и структуру понятия. По Леонтьеву А.Н. [4] любой знак состоит из трёх компонент: образа, который является «закодированным представлением предмета деятельности; значения как преобразованную, свёрнутую в структуре языка идеальную форму существования предметного мира, его свойств, связей, отношений, раскрываемых общественной практикой»; личностного смысла или «значения для себя», который связывает имеющийся опыт субъекта, его потребность и свойства предметов деятельности. Воспользуемся структурным представлением знака, данным в работе [6] и уточним, что знак для нас интересен прежде всего тем, что он обозначает некоторое математическое понятие. В соответствии с [6] знак и его структуру можно представить в виде пирамиды. Осознание структуры пирамиды и отношений между её компонентами будет означать понимание понятия. Базовый элемент математической картины мира субъекта представляет собой пирамиду, которую можно назвать пирамидой понимания. Основание пирамиды представляет собой сущность какого -либо математического понятия для субъекта, а имя понятия обозначает именно это понятие. Здесь важно подчеркнуть, что личностный смысл входит непосредственно в структуру пирамиды понимания, а не является внешней по отношению к понятию компонентой.

Образ математического понятия представляет собой структуру, включающую как теоретические, так и эмпирические слои познавательного опыта. Понимание в математике подразумевает, что обучающийся способен выявить смысл математического текста, то есть воссоздать внеязыковую реальность. Эта внеязыковая реальность, или мысленный (понятийный) образ (по И.В. Шадриной [11]), разворачивается в последовательности, соответствующим классификации М.А. Холодной [8]: чувственно-сенсорный, визуально-пространственный, знаково-символический, операционально-логический слои. Образ математического понятия – это некоторое семантическое поле, которое связывает различные составляющие когнитивного опыта. Образ математического понятия образуется главным образом с помощью воображения, памяти, определенной идеи в процессе абстрагирования, обобщения. Мысленный образ понятия отражает его содержание, который обогащается по мере уточнения математического опыта познающего субъекта. Математические образы, с одной стороны, выполняют функцию поддержки математической мысли, а с другой стороны, содержатся внутри понятийной структуры как её неотъемлемая составляющая. В случае сформированности математических образов, обучающийся оперирует с самими математическими объектами. Наличие образов позволяет представить математическое понятие целостно. Важно заметить, что образ предложенный на занятии педагогом, являясь по терминологии [15] внешним визуальным образом (visual image), может быть воспринят обучающимся в контексте её использования в математической деятельности, то есть visual image может считаться образом только для такого обучающегося, который способен адекватно воспринимать, предложенный преподавателем образ. Подача образов педагогом в процессе преподавания должна иметь в виду, что только контролируемые образы [12] служат формированию адекватных математических представлений.

Значения – результат познавательной деятельности людей, система законов, выведенных из повторяемых с одним и тем же результатом опытов и наблюдений. Значение чего-либо является объективным, оно отвечает на вопрос «как»; оно передаётся другим без потери смысла. Значение по Л.С. Выготскому «является объективным отражением системы связей и отношений». Совокупность значений представляет собой системно организованную базу знаний, существующую объективно.

Личностный смысл, или «значение для меня» соединяет предметы и свойства реальности с опытом и наличными потребностями конкретного индивида и отражает эмоционально-чувственные нюансы обучающегося. Личностный смысл является по существу внутренним критерием для выполнения определенных действий по удовлетворению потребности субъекта.

Понимание базируется как на компонентах пирамиды понимания, так и на отношениях между компонентами. Представляет интерес, каким образом и в какой последовательности в процессе формирования понятия связываются компоненты знака. Если вершины пирамиды не связаны между собой, то есть между соседними компонентами отсутствуют связи, то понимания, то есть осознания не происходит. Очевидно, что если отсутствует личностный смысл, то строить образ бессмысленно [5]. Таким образом, наличие имени, которое связывает образ, значение и личностный смысл в единое целое и означает понимание обучающимся математического объекта. С другой стороны, отсутствие отношений между компонентами свидетельствует не только о неосознанности понятия, но и позволяет преподавателю выявить у обучающегося разрывы между компонентами в пирамиде и предпринять соответствующие действия по устранению этих разрывов.

Литература:

1. ВыготскийЛ.С. [2005]. Психология развития человека. М.: Смысл.
2. Горбачёв В.И. [2013]. Содержательно-теоретический подход к обучению математиков категории «математической картины мира»// Вестник Брянского государственного университета. №1-1. с. 94-100.
3. Лебедев С.А. [2004]. Философия науки: Словарь базовых терминов. Москва. Академический проспект. 320с
4. Леонтьев А.Н. [1975]. Деятельность. Сознание. Личность: Политиздат, с.115
5. Осипов Г.С., Панов Ф.И., Чудова Н,В, Кузнецова Ю.М. [2017]. Знаковая картина мира субъекта поведения. М.:Физматлит, с.260
6. Панов А.И.[2015]. Исследование методов, разработка моделей и алгоритмов формирования элементов знаковой картины мира субъекта деятельности. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических работ.
7. Степин В.С. [2003]. Теоретическое знание. Структура. Историческая эволюция. М.: Прогресс-Традиция,с.744.
8. Холодная М. А. Психология интеллекта: парадоксы

исследования. – Томск: Изд-во Томск. ун-та; М.: Изд-во «Барс», 1997. – 392
9. Холтон Дж. [1992]. Что такое «анти-наука»? / пер. с англ. Толстов А. Б. // Вопросы философии. – № 2. – С. 26–58.
10. Чудова Н.В. Концептуальное описание картины мира в задачах моделирования поведения.[2012] // Искусственный интеллект и принятие решений №2, с.51-62
11. Шадрина И.В. [2018] Методология элементарного математического курса. Studme.org.
12. Aspinwall L., Shaw K.L., Presmeg N.C. [1997]. Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative // Educational Studies in Mathematics. Vol. 33(3). P. 301–317.
13. Pirie, S., & Kieren, T. [1989]. A recursive theory of mathematical understanding. For the Learning of Mathematics, 9(3), 7–11.
14. Presmeg N., Radford L., Roth W-M., Kadunz G.[2016] Semiotics in Mathematics Education, Hamburg, Springer Open, p. 45.
15. Presmeg N.C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology // A.Gutierrez, P.Boero (Eds.). Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future. P. 205–235.
16. Sierpinska A. [1990] Some remarks on understanding in mathematics. For the Learning of Mathematics, 10, 3, 24–36.
17. Skemp, R. R. [1976]. Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics Teaching, 77, 20– 26.
18. Tall D., Vinner S. [1981]. Concept image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.
19. Tegmark, Max I. [1998] The theory of every thing merely the ultimate Eusemble theory? Annals of Physics: journal. (vol.270 №1), 1-51. – doi: 10.1006/aphy. 1998.5855

Об авторе:

Туктамышов Наил Кадырович, доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия, nail1954@gmail.com

About the autor:

Nail K. Tuktamyshov, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics, Kazan State University of Architecture and Civil Engineering, Kazan, Russia, nail1954@gmail.com

СЕКЦИЯ 3. СОВРЕМЕННЫЕ ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

УДК 371.695

Анкудимова Т.И.

Современные цифровые технологии в образовании

В данной статье говорится о современных цифровых технологиях, используемых на занятиях в СПО. В настоящее время с цифровыми технологиями мы встречаемся повсюду, образование также преуспевает в данном направлении. Педагог идёт в ногу со временем и со своими обучающимися и умело пользуется модными гаджетами и технологиями.

Ключевые слова: цифровизация, цифровые технологии в образовании, совершенствование системы образования

Tatyana I. Ankudimova

Modern Digital Technologies in Education

This article talks about modern digital technologies used in the classroom in the vocational school. Currently, we meet with digital technologies everywhere, education is also succeeding in this direction. The teacher keeps up with the times and with his students and skillfully uses fashionable gadgets and technologies.

Keywords: digitalization, digital technologies in education, improvement of the education system

Тенденции мирового развития связаны с интенсивным проникновением во все сферы жизни новых технологий, информатизации или, как часто её называют – цифровизация, и она становится безусловным трендом в мировой системе образования.

В настоящее время одним из значимых приоритетов государственной политики Российской Федерации является построение цифровой экономики и цифровая трансформация образования, что отражено в стратегических документах федерального уровня: закон «Об образовании в Российской Федерации» (статьи 16 и 18) [1].

Федеральный проект «Цифровая образовательная среда» нацелен на создание к 2024 году современной и безопасной цифровой образовательной среды, обеспечивающей высокое качество и доступность образования всех видов и уровней (ответственный – Министерство науки и высшего образования РФ).

Цифровые технологии являются наиболее обсуждаемыми темами в педагогической среде. В школах, колледжах наблюдается цифровая трансформация. Все чаще присутствуют инструменты для онлайн обучения, открытые образовательные ресурсы и сервисы, развиваются системы для обработки больших данных, наблюдается пилотное внедрение технологии виртуальной дополненной реальности, мобильной технологии, интеллектуальных систем. Новые педагогические модели успешно интегрируются с новыми технологиями.

В ближайшее время в учебном процессе будут повсеместно реализованы технологии смешанного обучения.

На сегодняшний день меняется деятельность педагога, новые навыки преподавателя формируются в условиях цифровой и сетевой трансформации общества. У него появляются новые функции: разработчик контента, тьютор, фасилитатор ….

Использование в сфере образования средств информационно-коммуникационных технологий предполагает реализацию возможностей для достижения определенных педагогических целей. Одной из этих целей является реализация социального заказа современного общества в условиях информатизации и глобализации.

Современное общество заинтересованно в том, чтобы система образования обеспечивала своих выпускников необходимым им уровнем подготовки в области новых современных технологий. Для этого нужно, чтобы педагоги в школах, колледжах готовили выпускников к жизни и деятельности в информационном обществе.

Повышение качества образования может быть обеспечено за счет реализации уникальных информационно-коммуникационных технологий. С помощью новых сервисов можно развивать мотивацию у обучающихся к образованию, активизировать познавательную деятельность, углублять межпредметные связи, создавать открытые информационные ресурсы.

В последнее время, набирает оборот дистанционное обучение, которое дает возможность и обеспечивает использования дистанционных образовательных технологий в учебном процессе.

Дистанционное обучение – это взаимодействие на расстоянии между педагогом и обучающимися.

Дистанционное обучение реализуется за счет применения специальных средств интернет технологии. Данное обучение позволяет: выполнение практических заданий, взаимодействие с педагогом и другими обучающимися, контроль знаний, умений и навыков. Для того чтобы занятия проходили успешно, лучше всего педагогу создать полноценный дистанционный учебный курс по своему предмету, либо курс, который включает некоторые разделы данного предмета. Для этого нужно создать свой контент.

Остановимся и подробно рассмотрим одну из систем дистанционного обучения Moodle.

Moodle – бесплатная платформа с широкими возможностями. Данная платформа предлагает пользователю различные панели инструментов, возможность отслеживать прогресс и активность обучающихся, поддерживает мультимедиа. Система позволяет создавать курсы, адаптированные под мобильные телефоны.

На платформе Moodle можно создавать учебный курс, общаться с другими пользователями, просматривать успеваемость и активность обучающихся.

Для успешного усвоения учебного материала обучающимися, курс должен включать в себя три части:

1. Теоретическую часть, предполагает самостоятельное изучение материала (тексты, видеоролики, ссылки на электронные образовательные ресурсы, презентация, ссылки на видео записи в интернете, электронные тесты, рекомендации по изучению материала).
2. Практическая часть, содержит задания для выполнения практических и контрольных работ.
3. Контролирующая часть, состоит из вопросов, тестов, упражнения, опросы для самопроверки.

После изучения учебного курса результатом деятельности могут быть: анимационные ролики, веб карты, анкетирование, контрольная работа, опрос, частота посещения курса обучающимися. По результатам в системе обучения формируется индивидуальный рейтинг обучающегося.

Таким образом, цифровизация образования и использование цифровых технологий изменяет содержание обучения, а также подачу информации, это не только презентации или видео, это уже прямые подключения к информационным сетям, базам данных, форумам. Когда проводятся практические занятия, возможно использование социальных сетей. Актуальными в обучении становятся электронные издания, многие издательства, специализирующиеся на издании учебной литературы, переходят на электронные версии учебников. Цифровые технологии активно развиваются, обновляются и формируют базу для интенсивного внедрения инноваций.

Литература:

1. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 N 273-ФЗ // Собрание законодательства Российской Федерации: официальный сайт.

Об авторе:

Анкудимова Татьяна Ивановна, преподаватель общепрофессиональных дисциплин, ГБП ОУ Самарской области «Самарский социально-педагогический колледж», г. Самара, Россия, ankudimovati@mail.ru

About the autor:

Tatyana I. Ankudimova, teacher of general professional disciplines, Samara Socio-Pedagogical College, Samara, Russia, ankudimovati@mail.ru

УДК 681.05

Герасимова О.Ю., Галиев Р.М., Краснова Е.Л.

Развитие технического творчества учащихся психолого-педагогических классов

В статье поднимается круг вопросов, касающихся развития технического творчества школьников, определяются компоненты технических способностей, выявляет особенности организации занятий с применением образовательного робототехнического конструктора применительно к психолого-педагогическим классам.

Ключевые слова: техническое творчество, робототехника, конструирование, конструкторы VEX IQ для образования, психолого-педагогические классы

Olga Yu. Gerasimova, Rustem M. Galiev, Elena L. Krasnova

Development of Technical Creativity of Students of Psychological and Pedagogical Classes

The article raises a range of issues related to the development of technical creativity of schoolchildren, defines the components of technical abilities, reveals the features of organizing classes using an educational robotic kit in relation to psychological and pedagogical classes.

Keywords: technical creativity, robotics, design, VEX IQ constructors for education, psychological and pedagogical classes

Робототехника является одним из приоритетных направлений современного научно-технологического развития Российской Федерации и на сегодняшний день одна из самых динамично развивающихся областей промышленности поэтому необходимые квалифицированные кадры, надо взращивать начиная со школьной скамьи. В современном мире границы между науками стираются, а развитие наукоемких технологий идет очень быстро, выдвигаются новые требования к квалификации специалиста – требуется овладение принципиально новыми компетенциями, а также поиск и постоянное освоение новой информации. Поэтому важно еще в школе развивать у учащихся эрудицию, общекультурные компетенции. Школьник должен получить опыт решения творческих задач, коммуникации, опыт применения теоретических знаний на практике. Развитию этих качеств в совокупности с другими формами организации обучения способствуют занятия техническим творчеством.

Техническое творчество нераздельно связано с открытиями и изобретениями. Как часть искусства оно несет в себе не только эстетическую функцию, но и инновационную. Техническое творчество – это то, что помогает научной деятельности стать непосредственной производительной силой. Все искусственное, что окружает человека, сделано в рамках технического творчества посредством экспериментов и открытий.

Процесс развития технического творчества является одним из способов формирования профессиональной ориентации и интереса к технике и науке детей.

Техническое творчество способствует развитию технических способностей. Главными компонентами технических способностей являются: склонность к технике и техническому творчеству, техническое мышление, пространственное воображение, техническая наблюдательность, ярко выраженная зрительная и моторная память, точность глазомера, ручная умелость (ловкость).

Техническое творчество способствует также приобретению опыта технической творческой деятельности, имеющего большое значение для формирования личности. Если с раннего возраста детей включать в творческую деятельность, то у них развиваются пытливость ума, гибкость мышления, память, способность к оценке предметов и явлений, предвидению и другие качества, характерные для человека с развитым интеллектом. С возрастом эти качества укрепляются, совершенствуются и становятся чертами личности человека [2, с. 21].

Развитию технического творчества школьников способствует в том числе и образовательные робототехнические конструкторы. Уникальность образовательной робототехники заключается в возможности интеграции математического и естественнонаучного образования с развитием инженерного мышления через техническое творчество.

Робототехника начинается с конструирования. Целенаправленная и систематическая работа по развитию у школьников инженерного мышления, навыков конструирования роботов, отвечающих заданным параметрам и требованиям, способствует формированию креативного мышления и пространственного воображения, развитию мелкой моторики, внимательности, аккуратности и изобретательности, а также способствует получению новых знания об окружающем мире.

Образовательные конструкторы VEX IQ многофункциональное оборудование, не являющееся законченной игрушкой, то есть, у школьника есть возможность самостоятельно создать объект/игрушку, а в дальнейшем и изменять ее, а это – хороший тренажер для воображения.

Исходя из определения Е.В. Волковой, образовательным конструктор может называться, если он соответствует определенным критериям.

Во-первых, конструктор должен стремиться к бесконечности, т. е. предлагать такое количество вариантов конструирования, которое только способен придумать педагог и ребенок, он не должен ограничивать воображение.

Во-вторых, в конструкторе должна быть заложена идея усложнения, которая, как правило, обеспечивается составляющими элементами, деталями конструктора, которые делают конструирование разнообразным и в перспективе сложным.

В-третьих, набор для конструирования должен входить в линейку конструкторов обеспечивающих возможность последовательной работы с каждым набором, в зависимости от возраста детей и задач конструирования.

В-четвертых, нести полноценно смысловую нагрузку и знания, которые выражаются в осмысленном создании и воспроизведении детьми моделей объектов реальности из деталей конструктора. В результате чего дети демонстрируют степень освоения знаний и предметно-чувственного опыта [1].

Сегодня многие школы имеют в своем арсенале такие конструкторы, но, к сожалению, чаще всего эти конструкторы пылятся на полках. Несмотря на скорость развития технологий, преподаватели информатики до сих пор даже отдаленно не представляют, что такое образовательная робототехника и зачем она нужна.

В 2021-2022 учебном году на базе МБОУ СОШ № 42 г. Набережные Челны были открыты два класса инженерной направленности в сотрудничестве с Набережночелнинским государственным педагогическим университетом и это позволило заняться преподавателям кафедры информатики и вычислительной математики со школьниками 8 и 9 классов образовательной робототехникой на базе конструктора VEX IQ. Общее количество школьников, охваченных программами психолого-педагогической направленности в данной школе, составляет более 80 человек в рамках различных профилей. Глава Минпросвещения отмечает, что в России создается сеть психолого-педагогических классов и это один из важных шагов в развитии педагогического образования. «Такие классы помогают формировать единую систему подготовки учителей, мотивировать молодых людей и выстраивать систему ранней профориентации», – заявил Сергей Кравцов.

Как отмечают преподаватели, у школьников, занимающихся регулярно робототехникой резко возрос интерес к физике, математики и информатики. Буквально с первых занятий выделились лидеры, имеющие способности к робототехнике у них проявились творческие способности и инженерная смекалка.

Таким образом, развитие технического творчества учащихся психолого-педагогических классов с использованием образовательных конструкторов VEX IQ улучшают понимание естественнонаучных дисциплин и способствует ранней профориентации. Детям нравятся развлекательные вещи, с которыми они обычно не сталкиваются, или решать задачи, требующие знаний и навыков из разных областей науки и техники.

Литература:

1. Волкова, Е. В. Определение понятия образовательный робототехнический конструктор / Е. В. Волкова // Психология и педагогика: актуальные вопросы, достижения и инновации : сборник статей II Международной научно-практической конференции, Пенза, 10 ноября 2016 года / под общей редакцией Г.Ю. Гуляева. – Пенза: «Наука и Просвещение» (ИП Гуляев Г.Ю.), 2016. – С. 72-78.
2. Литова, З. А. Техническое творчество и его роль в развитии технического мышления школьников / З. А. Литова // Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. – 2018. – № 4(56). – С. 77-83.

Об авторе:

Герасимова Ольга Юрьевна, кандидат педагогических наук, и.о. зав каф ИиВМ, ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», г. Набережные Челны, Россия, gerola1970@mail.ru

Галиев Рустем Мирзанурович, кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник, ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», г. Набережные Челны, Россия, nis@tatngpi.ru

Краснова Елена Леонидовна, кандидат педагогических наук, декан ФМИ, ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», г. Набережные Челны, Россия, gerola1970@mail.ru

About the autor:

Olga Yu. Gerasimova, Candidate of Pedagogical Sciences, Acting Head of the IiVM Department, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia, gerola1970@mail.ru

Rustem M. Galiev, Candidate of Pedagogical Sciences, Senior Researcher, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia, nis@tatngpi.ru

Elena L. Krasnova, Candidate of Pedagogical Sciences, Dean of FMI, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia, gerola1970@mail.ru

УДК 372.851

Зайцева Ж.И.

Компьютерные технологии при изучении темы «Применение частных производных функции нескольких переменных»

В статье рассматривается методика использования информационных технологий в учебном процессе преподавания математики путем создания и использования новых форм программных педагогических продуктов с применением средств передовых компьютерных технологий. Данная статья является развитием основных аспектов преподавания математики, связанного с дифференцированием функции и рассмотренной нами в [3].

Ключевые слова: тренажер, компьютерная математическая система, дифференциальное исчисление, информатизация математического образования, информационные технологии

Ilinichna Z. Zhanna

Computer Technology in The Study of the Topic «Application of partial derivatives of the function of several variables»

The article discusses the method of using information technologies in the educational process of teaching mathematics by creating and using new forms of software pedagogical products using advanced computer technologies. This article is the development of the main aspects of teaching mathematics related to the differentiation of the function and considered by us in [3].

Keywords: simulator, computer mathematical system, differential calculus, informatization of mathematical education, information technologies

Функции нескольких переменных, как естественное обобщение функций одной переменной, выделились в самостоятельный раздел математики достаточно давно и являются инструментом, позволяющим описать многие закономерности, существующие в природе (физике, технике, экономике). В настоящее время понятия и математический аппарат функций, зависящих от нескольких переменных, лежат в основе многих дисциплин (например, дифференциальные уравнения в частных производных, линейное программирование и др.) и являются необходимым набором знаний профессионально подготовленных кадров.

В последнее время актуальной проблемой в сфере высшего образования является наличие профессионально подготовленных кадров. Вносятся различные изменения в учебные планы, пересматриваются структуры изучаемых дисциплин. Использование информационных и коммуникационных технологий помогает усилить профессиональную направленность в решении предметных задач за счет дополнительного рассмотрения справочного математического содержания, углубления знаний о необходимом математическом материале, создания индивидуального темпа просмотра математической составляющей.

Для внедрения информационных технологий в структуру математического образования необходимо подготовить информационное обеспечение учебного процесса; в качестве действенного средства контроля и самоконтроля мы предлагаем использовать в учебном процессе тренажер по теме «Применение частных производных функции нескольких переменных», который разработан авторами в компьютерной математической системе Mathematica. Этот тренажер имеет все свойства обучающе-контролирующей программы и предназначен для организации самостоятельной работы студентов (как аудиторной, так и домашней) при изучении раздела «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных». В данной статье не приводится программный код составления тренажера (он защищен авторским свидетельством [2] и изложен в [1]), здесь прослеживается дидактическая последовательность составления тренажера преподавателем, порядок действий студента и реакции тренажера именно по указанной теме, подобно [3].

Рассмотрим структуру и порядок работы тренажера. В каждом варианте есть запись: «Далее выделите скрытую ячейку левой кнопкой мышки, нажмите по очереди Shift+Enter и следуйте дальнейшим указаниям». После того как выполнено данное указание, на экране появляется диалоговое окно с надписью, что нужно в нем писать (рисунок 1), и тренажер вступает в диалог с пользователем.

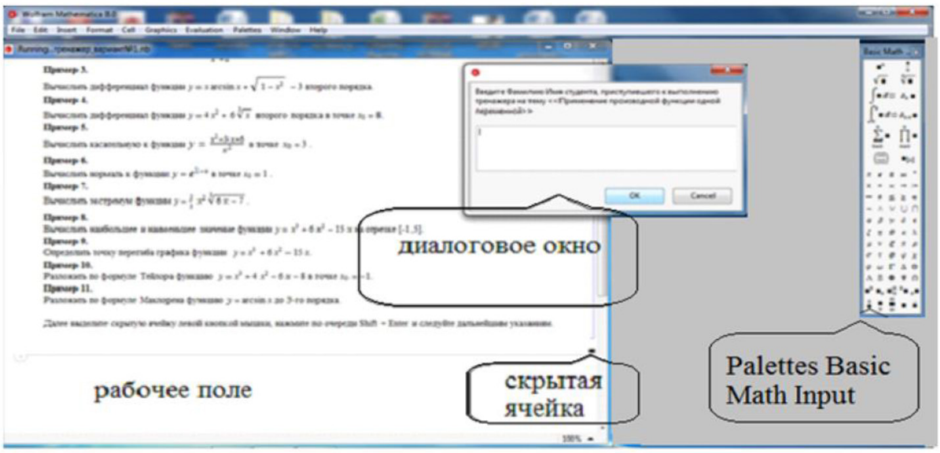

Рисунок 1– Общий вид тренажера

В диалоговое окно вводятся: фамилия, имя студента, номер группы и номер выполняемого варианта, а также условия примеров. Тренажер контролирует каждый шаг студента, производя параллельно с ним необходимые вычисления и сравнивая их с теми, которые вводит студент. Если студент введет другое условие, то тренажер ошибки не выдаст, но на рабочем поле отразится это новое условие, что позволит преподавателю увидеть подмену. После введения условий примера студентунеобходимо решить его и записать в диалоговое окно последовательно промежуточные результаты и полученный ответ. Все производимые действия отражаются в рабочем поле. Если введенный результат правильный, то в рабочем поле появится запись «Молодец! Количество ошибок 0», и компьютер предлагает перейти к выполнению дальнейших указаний; в противном случае в рабочем поле появится другая запись: «Вы допустили ошибку. У вас осталось 2 попытки». В этом случае есть возможность самостоятельно найти ошибку в решении примера. Следует перерешать и записать в диалоговое окно исправленное значение; если оно правильное, то в рабочем поле появится запись «Молодец. Количество ошибок 1», и можно переходить к выполнению дальнейших указаний. В противном случае будет запись «Вы допустили ошибку. У вас осталась 1 попытка», и можно вновь попытаться найти ошибку и т.д. Всего можно допустить три ошибки, после чего тренажер выводит правильный ответ и количество сделанных ошибок.

Рассмотрим содержание тренажера по теме «Применение производной функции нескольких переменных», который создан в компьютерной математической системе Mathematica в качестве обучающе-контролирующей программы при изучении раздела математики «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных».

Пример 1.Вычислить $y_x^/$ функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

Вводится условие примера (функция $F(x, y)$), результат промежуточного решения ($\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$) и затем ответ ($y_x^/$).

Всего можно допустить 9 ошибок.

Пример 2. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Вводится условие примера (функция $F(x, y, z)$), результат промежуточного решения ($\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$), затем ответ ($\frac{\partial z}{\partial x}$).

Всего можно допустить 9 ошибок.

Пример 3. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Вводится условие примера (функция $F(x, y, z)$), результат промежуточного решения ($\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$), затем ответ ($\frac{\partial z}{\partial y}$).

Всего можно допустить 9 ошибок.

Пример 4. Составить уравнение касательной прямой в точке $M(x_0, y_0)$к графику функции $y = f(x)$, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

Вводится условие примера (функция $F(x, y)$, координаты точки x_0, y_0), результат промежуточного решения (тангенс угла наклона касательной в точке x_0) и затем ответ (уравнение касательной).

Всего можно допустить 6 ошибок.

Пример 5. Составить уравнение нормали в точке $M(x_0, y_0)$ к графику функции $y = f(x)$, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

Вводится условие примера (функция $F(x, y)$, координаты точки x_0, y_0), результат промежуточного решения (тангенс угла наклона нормали в точке x_0) и затем ответ (уравнение нормали).

Всего можно допустить 6 ошибок.

Пример 6. Составить уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ к графику функции $z = f(x,y)$.

Вводится условие примера (функция $z = f(x,y)$, координаты точки x_0, y_0, z_0), результат промежуточного решения (нормальный вектор касательной плоскости) и затем ответ (уравнение касательной плоскости).

Всего можно допустить 6 ошибок.

Пример 7. Составить уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ к графику функции $z = f(x,y)$, определенной неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$.

Вводиться условие примера (функция $F(x,y,z)$, координаты точки x_0, y_0, z_0), результат промежуточного решения (нормальный вектор касательной плоскости) и затем ответ (уравнение касательной плоскости).

Всего можно допустить 6 ошибок.

Пример 8. Вычислить градиент функции $z = f(x,y)$ в точке с координатами (x_0, y_0).

Вводится условие примера (функция $f(x,y)$, координаты точки x_0, y_0), результат промежуточного решения ($\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$) и затем ответ (абсцисса и ордината градиента).

Всего можно допустить 12 ошибок.

Пример 9. Вычислить модуль градиента функции $u = u(x,y,z)$ в точке с координатами (x_0, y_0, z_0).

Вводятся условия примера (функция $u(x,y,z)$, координаты x_0, y_0, z_0), результат промежуточного решения ($\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, координаты градиента, найденные в точке с координатами (x_0, y_0, z_0)) и затем ответ (модуль градиента).

Всего можно допустить 15 ошибок.

Пример 10. Вычислить производную $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}$ по направлению вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ в заданной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ для функции $u = u(x,y,z)$.

Вводится условие примера (функция $u(x,y,z)$, координаты вектора a_x, a_y, a_z и координаты точки x_0, y_0, z_0), результат промежуточного решения (координаты единичного вектора, координаты градиента в заданной точке) и затем ответ (производная по направлению).

Всего можно допустить 9 ошибок.

Пример 11. Вычислить экстремум функции двух переменных $z = f(x,y)$.

Вводится условие примера (функция $f(x,y)$), результат промежуточного решения ($\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, критическая точка) и затем определяется ответ.

Всего можно допустить 11 ошибок.

Далее все ошибки суммируются, и на основании полученной суммы выставляется оценка следующим образом: если от 0 до 14 – «отлично», если от 15 до 30 – «хорошо», если от 31 до 52 – «удовлетворительно», если от 53 до 98 – «неудовлетворительно».

Один из вариантов выполняемой работы:

Пример 1. Вычислить y'_x функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.

Пример 2. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = f(x,y)$, заданной неявно уравнением $\sin(xy) - e^{xy} - y \cdot x^2 = 0$.

Пример 3. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x,y)$, заданной неявно уравнением $x^2 \cdot e^{2y} - y^2 \cdot e^{2x} = 0$.

Пример 4. Составить уравнение касательной прямой в точке $M(0,1)$ к графику функции $y = f(x)$, заданной уравнением $xy = arctg(x/y)$.

Пример 5. Составить уравнение нормали в точке $M(-1, 3)$ к графику функции $y = f(x)$, заданной уравнением $x^4 + y^4 = x^2 y^2$.

Пример 6. Составить уравнение касательной плоскости в точке $M(-3{,}4{,}17)$ к графику функции $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$.

Пример 7. Составить уравнение касательной плоскости в точке $M(2, 1, 0)$ к графику функции $z = f(x, y)$, определенной неявно уравнением $e^z - z + xy = 3$.

Пример 8. Вычислить градиент функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ в точке с координатами $M(4, 3)$.

Пример 9. Вычислить модуль градиента функции $u = y\ln(1 + x^2) - arctgz$ в точке с координатами $M(0{,}1{,}1)$.

Пример 10. Вычислить производную $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{a}}$ по направлению вектора $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ в заданной точке $M(2{,}1{,}1)$ для функции $u = x + \ln(z^2 + y^2)$.

Пример 11. Вычислить экстремум функции двух переменных $z = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$.

Так как в тренажере используется одна скрытая ячейка, то подобных однотипных вариантов можно составить любое количество. Стоит отметить, что работа тренажера отличается от простого тестирования тем, что в процессе решения поставленного примера вводится не только ответ, но и промежуточное решение, составленное исходя из формул, используемых при решении каждого примера конкретно, что позволяет преподавателю увидеть рассуждения, логику и уровень усвоения изучаемого материала.

Использование рассмотренного тренажера за счет поэтапного решения математических задач эффективно реализует важные дидактические принципы, направленные на активизацию познавательной деятельности обучаемых: индивидуализация и дифференциация процесса обучения, осуществление контроля с обратной связью – диагностикой ошибок по результатам учебной деятельности и оценкой учебной деятельности, осуществление самоконтроля, самокоррекции, тренировки в процессе обучения. Использование данного тренажера в учебно-воспитательном процессе может дать положительный результат только при комплексном использовании компьютерной техники как средства обучения совместно с традиционной системой обучения. При этом ведущая роль должна оставаться за преподавателем, на которого должны равняться обучающиеся, и только в этом случае они будут развиваться как личности. Целью активизации обучения является не увеличение объема передаваемой информации, ее спрессовывание или ускоренный процесс считывания, а создание дидактических и психологических условий осмысленности учения, включения в него обучаемых на уровне не только интеллектуальной, но и личностной позиции.

Меняющиеся подходы к математическому образованию ставят проблему отбора и использования различных форм, методов и технологий обучения. При этом недостаточно просто отобрать методы эффективного обучения, но их необходимо интегрировать в одну взаимосвязанную непротиворечивую и взаимодействующую систему. Мы попытались выстроить единую концепцию при изучении студентами дифференциального исчисления функций.

Литература:

1. Зайцева Ж.И. Обучающе-контролирующие программы-тренажеры в среде Mathematica// Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» – GRACOS-17. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики – «KAZCAS-2017». Международная научно-практическая конференция – «ИТОН-2017». // Материалы семинара, школы и конференции. / Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Игнатьева. – Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. – 279 с. – С. 170-176.
2. Зайцева Ж.И. Программа тренажера для решения задач по математике, созданного в компьютерной математической системе Mathematica, по теме «Применение частных производных функции нескольких переменных» // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015612868,2015.
3. Karamyshev A.N., ZaytsevaZh.I. “Applications of a Derivative Function of One Variable”, HELIX, 2019. Vol: 9 Is: 5 – pp.: 5427-5431

Об авторе:

Зайцева Жанна Ильинична, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, Набережночелнинский институт (филиал) Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Набережные Челны, Россия

About the autor:

Zhanna I. Zaytseva, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Naberezhnye Chelny Institute (branch) Kazan (Volga Region) Federal University, Naberezhnye Chelny, Russia

УДК 372.851

Зайцева Ж.И., Губочкина Н.И.

Изучение частных тейлоровских производных с использованием компьютерной системы Mathematica

В статье рассматривается возможность применения частных тейлоровских производных в математическом образовании высшей школы, а также использование компьютерной математической системы Mathematica, как средства для проведения вспомогательных вычислений в процессе решения учебных задач по данной теме на аудиторных занятиях.

Ключевые слова: частная тейлоровская производная, информатизация математического образования, информационные технологии

Zhanna I. Zaytseva, Natalya I. Gubochkina

Study of Partial Taylor Derivatives Using the Computer System Mathematica

The articledealswith the possibility of using partial Taylor derivatives in the mathematical education of higher school, as well as the use of mathematical computer system Mathematica as a means of auxiliary calculations in the process of solving educational problems on this topic in the class.

Keywords: partial Taylor derivative, informatization of mathematical education, information technology

Применение современных информационных технологий и соответствующих им программных педагогических продуктов в преподавании математики, связано с необходимостью повышения уровня заинтересованности студентов в изучении тем данной дисциплины. Следовательно, возникает проблема интеграции накопленных методических знаний и дидактических материалов с возможностями информационных технологий, а также выработки новых методик преподавания, соответствующих новым возможностям владения математическим материалом.

Рассмотрим одну из сторон процесса информатизации высшего образования, а именно, методику использования информационных технологий в процессе обучения математике по теме «Частная Тейлоровская Производная» путем создания и использования новых форм педагогических программных продуктов с применением средств информационных технологий.

Пусть функция $K(t,s)\in C([-1,1]^2)$ и при каждом фиксированном $s\in[-1,1]$ существуют последовательно следующие пределы:

$$j!\lim_{t\to 0}(T_t^{\,j}K)(t,s)\equiv j!\lim_{t\to 0}\left\{\frac{K(t,s)-\sum_{i=0}^{j-1}\frac{K_t^{\{i\}}(0,s)t^i}{i!}}{t^j}\right\}\equiv K_t^{\{j\}}(0,s),$$

$$\left(j=0,1,\ldots,m;\ K_t^{\{0\}}\equiv K(0,s)\right).$$

Тогда величины $K_t^{\{1\}}(0,s), K_t^{\{2\}}(0,s),\ldots, K_t^{\{m\}}(0,s)$ назовем частными тейлоровскими производными (ЧТП) по переменной t соответствующих порядков от функции $K(t,s)$ в точке $t=0$. Аналогично определяем ЧТП функции $K(t,s)$ и по второй переменной S, а именно [1, с.17]:

$$K_s^{\{j\}}(t,0) \equiv j!\lim_{s\to 0}\left(T_s^j K\right)(t,s),\ \left(j=0,1,\ldots,q;\ K_s^{\{0\}} \equiv K(t,0)\right).$$

Если существует обычная частная производная, то существует и частная тейлоровская, причем значения их в точке равны.

Очевидно, что частная тейлоровская производная первого порядка совпадает с обычной частной производной в соответствующей точке.

На следующем примере мы продемонстрируем вычисление ЧТП функции имеющей специальный вид [1, с.18]:

$$K(t,s) = (t\cdot s)^m h(t,s) + t^m \sum_{i=0}^{m-1} g_i(t)s^i + \sum_{i=0}^{m-1} b_i(s)t^i,$$

где $h \in C\left([-1,1]^2\right),\ g_i \in C,\ \ b_i \in C\{m;0\},\ \left(i=\overline{0,m-1}\right).$

При этом будем использовать компьютерную математическую среду Mathematica, как средство для проведения вспомогательных вычислений в процессе решения данной задачи на аудиторных занятиях.

Пример. Рассмотрим функцию: $K(t,s) = \begin{cases} t^3\cdot s^2\cdot \sin\dfrac{s}{t} + t^2\cdot s + t^2,\ t\neq 0 \\ 0,\ t=0 \end{cases}.$

Используя компьютерную математическую среду Mathematica, на практических занятиях можно построить поверхность, заданную уравнением $K(t,s) = \begin{cases} t^3\cdot s^2\cdot \sin\dfrac{s}{t} + t^2\cdot s + t^2,\ t\neq 0 \\ 0,\ t=0 \end{cases}$ для визуализации функции, отметим также, что в среде Mathematica можно менять угол обзора (рис.1).

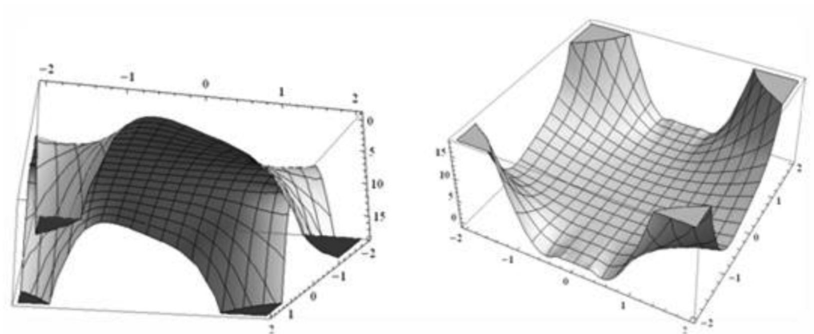

Рисунок 1 – График функции $K(t,s)$ в среде Mathematica

Можно сделать следующий вывод: графически видно, что функция $K(t,s)$ не имеет точек разрыва, а следовательно в каждой точке можно искать значение ЧТП.

Найдем частные производные функции $K(t,s)$ по переменной t.

$$K_t^{\{0\}} \equiv K(0,s) \equiv 0;$$

$$K_t^{\{1\}}(0,s) \equiv 1!\lim_{t\to 0}\left\{\frac{t^3\cdot s^2\cdot\sin\frac{s}{t} + t^2\cdot s + t^2 - \frac{0\cdot t^0}{0!}}{t}\right\} = \lim_{t\to 0}\left(t^2\cdot s^2\cdot\sin\frac{s}{t} + ts + t\right) =$$

$$= 0 + \lim_{t\to 0}(t\cdot s + t) = 0;$$

$$K_t^{\{2\}}(0,s) \equiv 2!\lim_{t\to 0}\left\{\frac{t^3\cdot s^2\cdot\sin\frac{s}{t} + t^2\cdot s + t^2 - \frac{0\cdot t^0}{0!} - \frac{0\cdot t^1}{1!}}{t^2}\right\} =$$

$$= 2\lim_{t\to 0}\left(t\cdot s^2\cdot\sin\frac{s}{t} + s + 1\right) = 2s + 2 + 2\cdot s^2\cdot\lim_{t\to 0} t\cdot\sin\frac{s}{t} = 2s + 2 + 0 = 2s + 2;$$

$$K_t^{\{3\}}(0,s)\equiv 3!\lim_{t\to 0}\left\{\frac{t^3\cdot s^2\cdot \sin\frac{s}{t}+t^2\cdot s+t^2-\frac{0\cdot t^0}{0!}-\frac{0\cdot t^1}{1!}-\frac{(2s+2)t^2}{2!}}{t^3}\right\}=$$

$$=6\lim_{t\to 0}\left(s^2\cdot \sin\frac{s}{t}+\frac{s}{t}+\frac{1}{t}-\frac{(s+1)}{t}\right)=6\lim_{t\to 0}\left(s^2\cdot \sin\frac{s}{t}\right)$$ — не существует.

Найдем частные производные функции $K(t,s)$ по переменной s .

$$K_s^{\{0\}}\equiv K(t,0)=t^2;$$

$$K_s^{\{1\}}(t,0)\equiv 1!\lim_{s\to 0}\left\{\frac{t^3\cdot s^2\cdot \sin\frac{s}{t}+t^2\cdot s+t^2-\frac{t^2\cdot s^0}{0!}}{s}\right\}=\lim_{s\to 0}\left(t^3\cdot s\cdot \sin\frac{s}{t}+t^2\right)=t^2;$$

$$K_s^{\{2\}}(t,0)\equiv 2!\lim_{s\to 0}\left\{\frac{t^3\cdot s^2\cdot \sin\frac{s}{t}+t^2\cdot s+t^2-\frac{t^2\cdot s^0}{0!}-\frac{t^2\cdot s^1}{1!}}{s^2}\right\}=2\lim_{s\to 0}\left(t^3\cdot \sin\frac{s}{t}\right)=0;$$

$$K_s^{\{3\}}(t,0)\equiv 3!\lim_{s\to 0}\left\{\frac{t^3\cdot s^2\cdot \sin\frac{s}{t}+t^2\cdot s+t^2-\frac{t^2\cdot s^0}{0!}-\frac{t^2\cdot s^1}{1!}-\frac{0\cdot s^2}{2!}}{s^3}\right\}=$$

$$=6\lim_{s\to 0}\left(\frac{t^3\cdot \sin\frac{s}{t}}{s}+\frac{t^2}{s^2}\right)=6t^2+6\lim_{s\to 0}\left(\frac{t^2}{s^2}\right)=\infty.$$

Можно сделать следующие выводы:

1. Рассматриваемая функция принадлежит пространству $C\{2;0\}$ [1, с. 18],

2. $K_t^{\{1\}}(0,s)=0$, $K_t^{\{2\}}(0,s)=2s+2$, $K_s^{\{1\}}(t,0)=t^2$, $K_s^{\{2\}}(t,0)=0.$

Можно использовать на аудиторных занятиях демонстрационно-моделирующее программное средство [2, с. 75], созданное в компьютерной математической среде Mathematica и уже для частных тейлоровских производных функций, удовлетворяющих свойствам [1, с. 18] (рис.2), где можно вводить функцию и переменную, по которой находиться частная тейлоровская производная, и демонстрационно-моделирующее программное средство сразу показывает ответ.

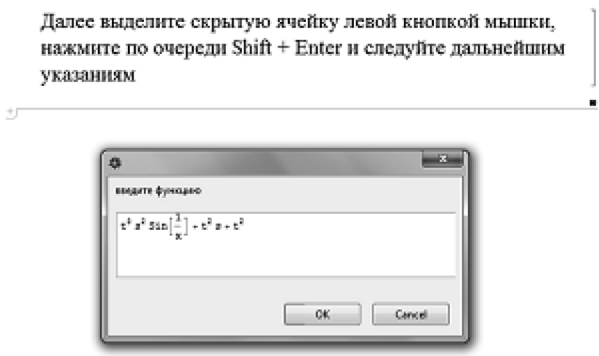

Рисунок 2 – Рабочая среда ДМПС

Отметим, что в диалоговое окно можно ввести любую функцию, которая принадлежит данному обобщенному виду, в нашем случае получается ответ (рис.3)

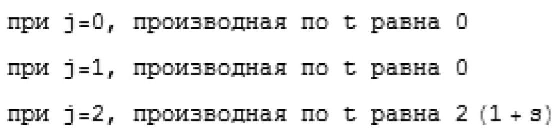

Рисунок 3 – Результат применения ДМПС

Так же можно использовать тренажер по теме «Частная Тейлоровская Производная», который разработан авторами в компьютерной математической системе Mathematica по принципу, описанному в [3]. Этот тренажер имеет все свойства обучающе-контролирующей программы и предназначен для организации самостоятельной работы студентов (как аудиторной, так и домашней).

Использование тейлоровской производной и компьютерной математической системы Mathematica в обучении позволяет интенсифицировать учебный процесс, сокращая затраты времени на трудоёмкие, но вполне рутинные вычисления, повышая уровень наглядности и уровень информации, позволяет внести в учебный процесс задачи, ранее не рассматриваемые и не решаемые на практических занятиях, например, задачи, в которых проблема экстремума не решается в терминах обычных производных, однако ряд из них решается в тейлоровских производных, вовлекая студентов в исследовательский процесс, прививая вкус к математическим экспериментам.

Литература:

1. Габбасов Н.С. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространстве обобщенных функций. – Казань, 2006. – 176с.
2. Зайцева Ж.И. Применение тейлоровской производной в учебном процессе //Ж.И. Зайцева, Н.И. Губочкина//Казанская наука. №3 2017. – Казань: Изд-во Казанский Издательский Дом, 2017. – 114 – С. 75-78.
3. Зайцева Ж.И. Обучающе-контролирующие программы-тренажеры в среде Mathematica// Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» – GRACOS-17. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики – «KAZCAS-2017». Международная научно-практическая конференция – «ИТОН-2017». // Материалы семинара, школы и конференции. / Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Игнатьева. – Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. – 279 с. – С. 170-176.

Об авторах:

Зайцева Жанна Ильинична, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, Набережночелнинский институт (филиал) Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Набережные Челны, Россия

Губочкина Наталья Ивановна, Набережночелнинский институт (филиал) Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Набережные Челны, Россия

About the autors:

Zhanna I. Zaytseva, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Naberezhnye Chelny Institute (branch) Kazan (Volga Region) Federal University, Naberezhnye Chelny, Russia

Natalia I. Gubochkina, Naberezhnye Chelny Institute (branch) Kazan (Volga Region) Federal University, Naberezhnye Chelny, Russia

УДК 372.862

Казеева Г.Г., Воробьева Е.В.

Математика для образовательной робототехники

Данная статья посвящена изучению вопроса использования в области робототехники математических определений. Выявлены определения из области математики и геометрии, этапы их использования. В дальнейшем будет разработана методика введения данных понятий.

Ключевые слова: математические определения, математика в робототехнике, геометрия в робототехнике

Galina G. Kazeeva, Ekaterina V. Vorobeva

Mathematics for Educational Robotics

This article is devoted to the study of the use of mathematical definitions in the field of robotics.

Keywords: Mathematical definitions, mathematics and robotics, geometry and robotics

Сейчас, когда образовательная робототехника становится всё более популярной и актуальной, активно развивается соревновательная робототехника. Участие в соревнованиях это этап подведения итогов для педагогов и обучающихся, стимул для дальнейшего развития [1, 4].

Подготовка обучающихся к участию в соревновательных мероприятиях – актуальная задача образовательного процесса в области робототехники.

Занятия для подготовки к соревнованиям могут быть организованы двумя способами: первый – порционно, системно, на каждом учебном занятии в течение всего срока обучения учащиеся анализируют с преподавателем отдельные функции технических систем, проводят эксперименты, находят ошибки и пути их решения. Второй способ – интенсивно, он предусматривает только сжатый формат представления информации – список возможных ошибок, способы их устранения и аналитический выбор более эффективной технологии исправления возможных ошибок. Для этого непосредственно перед соревнованиями выделяется несколько занятий, на которых преподаватель вместе с учащимися проводит полный анализ возможных ошибок и эффективности системы, тем самым просто натаскивает ученика на выполнение какого-либо задания [2].

Как правило, знания, в области робототехники обучающиеся получают с опережением учебной школьной программы. Для создания робота или написания программы требуются законы и научные факты, которые на школьном уроке обучающийся может получить через 2-3 года, а то и лет через 5. Например, при конструировании робота для перетягивания каната, обучающиеся робототехнике школьники 3-4 класса, должны понимать, как сделать робота устойчивым, где правильно сделать точку крепления каната, куда разместить большую часть нагрузочной массы – все эти знания обычный школьник получает на уроках геометрии и физики начиная с 7 класса.

Задача педагога на каждом занятии по робототехнике давать информацию с опережением, базовых знаний обучающего недостаточно, чтобы усвоить строгий теоретический материал, сделать выводы оперируя только понятиями и умозаключениями. Для эффективности усвоения знаний ребенку предоставляется возможность экспериментировать, а педагог должен умело ввести сложные понятия, законы и помочь сделать верные выводы.

Таблица 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ В РОБОТОТЕХНИКЕ

Понятие	Точка учета	Возможные эксперименты
Логическое условие	Написание программ	Работа робота в ограниченных условиях, смена действия. Проверка нахождения внутри поля, выбор объекта по цвету, обнаружение противника
Радиус, диаметр, длина окружности	Работа с колесами	Зависимость пройденного расстояния от радиуса (диаметра) колеса. Измерение пройденного роботом расстояния при разных радиусах колес за одно и тоже количество оборотов колес
	Знакомство с регламентом соревнования	Описание поля для кегельринга, робосумо, описание кеглей
Угол, смежный угол, внешний угол	Выполнение поворотов	Расчет угла поворота в различных ситуациях. Осмотр территории по внешнему или внутреннему контуру сложной фигуры, при условии, что известна величина того или иного угла
Округление	Написание программ	Вычисление с десятичными дробями. Выбор типа округления при вычислении. Расчет оборотов колес, пройденного расстояния, размера обекта.
Переменная	Написание программ	Изменение значения величины в процессе работы робота. Прохождение определенного числа препятствий, сбор или выброс определенного числа объектов

Нами было проведено исследование, которое позволило выявить понятия по математики и геометрии, требующие пропедевтики при подготовке к соревнованиям [3]. В таблице 1 приведены некоторые из них. Мы выбрали те понятия, которые чаще всего используются в различных соревнованиях. Например, соревнования на скорость прохождения дистанции, перетягивание каната, робофутбол, кегельринг, соревнования по перемещению объектов за строго отведенное время.

Математические определения требуют особой методики введения в учебный процесс. Большую их часть нужно подкреплять экспериментами и наглядными демонстрациями. В дальнейшем мы планируем разработать систему занятий с методической поддержкой для введения понятий по математике, геометрии и физики.

Литература:

1. Бускина А.Л. Робототехника: от простого к сложному / А.Л. Бускина – Пермь: 2016 – 37 с.
2. Борисова, В. А. Реализация программ подготовки к соревнованиям junior skills: очная и дистанционная форма организации / В. А. Борисова // Вестник Томского государственного педагогического университета. – 2021. – № 5(217). – С. 105-115.
3. Казеева, Г. Г. Методологические подходы к моделированию занятий техническим творчеством в аспекте развития интеллектуально-творческой

активности обучающихся / Г. Г. Казеева, Ю. С. Репринцева // Школа будущего. – 2021. – № 2. – С. 148-157.

4. Никитина Т.В. Образовательная робототехника как направление инженерно-технического творчества школьников / Т.В. Никитина. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. пед. ун-та, 2014. – 169с.

Об авторах:

Казеева Галина Геннадьевна, кафедра информатики и методики преподавания информатики, Благовещенский государственный педагогический университет, г. Благовещенск, Амурская область, Россия

Воробьева Екатерина Витальевна, студентка, физико-математический факультет, Благовещенский государственный педагогический университет, г. Благовещенск, Амурская область, Россия

About the autors:

Galina G. Kazeeva, Department of Informatics and Methods of Teaching Informatics, Blagoveshchensk State Pedagogical University, Blagoveshchensk, Russia

Ekaterina V. Vorobeva, student of the Faculty of Physics and Mathematics, Blagoveshchensk State Pedagogical University Blagoveshchensk, Russia

УДК 372.862

Казеева Г.Г.

Подготовка студентов к организации занятий в области робототехники

Техническое творчество всегда привлекало людей. В современном мире появились новые направления такого вида деятельности, они усложнили теоретические основы и изменили возрастные рамки обучающихся, которые способны заниматься техническим творчеством. Изменения структуры и содержания процесса, естественным образом, требует подготовки специалистов, способных по-новому обучать творческому подходу к решению технических задач.

Данное исследование рассматривает вопросы подготовки специалистов, готовых работать в разных направлениях детского технического творчества и организации системы подготовки таких специалистов.

Ключевые слова: техническое творчество, детское техническое творчество, подготовка руководителя кружка робототехники

Galina G. Kazeeva

Training of Students for the Organization of Classes in the Robotics in Education

Engineering creativity has always attracted people. New areas of focus have appeared in this field thus making the theoretical foundations more sophisticated and changing the age range of learners who are able to study engineering creativity. Changes in the structure and content of the process obviously require trained specialists who can apply new methods in teaching creative approaches to engineering tasks.

The present research work is focused on the necessity of training the specialists prepared to work in different areas of children's engineering creativity and organizing a system of training such specialists.

Keywords: engineering creativity, children's engineering creativity, training of a robotics club leader

В Благовещенском государственном педагогическом университете (БГПУ) более 25 лет ведется работа со школьниками города. Центр организации довузовского образования (ЦОДО) осуществляет набор обучающихся со 2 по 11 класс по разным направлениям подготовки. Организуются занятия иностранными языками, химией, ведется подготовка к итоговой аттестации (ОГЭ и ЕГЭ).

Много школьников проявляют интерес к обучению в области информатики. На начальном этапе работы направления «информатика» формировались группы для занятий языками программирования и алгоритмического решения математических задач, изучались и создавались проекты на основе программ работы с графикой, HTML программирования, велась пропедевтическая деятельность, где обучающие получали навыки работы с прикладными программами (Word, Excel, PowerPoint). В это время направление подготовки школьников называлось «Школа информатики».

Более 10 лет назад направление подготовки поменяло название на более широкое «Школа программирования и робототехники».

Образовательная робототехника получила большую популярность в городе и области. Преподаватели вуза почувствовали потребность родителей и обучающихся в занятиях по робототехнике и расширили деятельность школы. Сейчас подготовка школьников ведется в нескольких направлениях: микроэлектроника, конструирование роботов, программирование для малышей, программирование микроконтроллеров, языки программирования C++ и Python, 3D-моделирование и другие.

Образовательная робототехника оказалась привлекательной и доступной для детей разного возраста, ею начали заниматься в детских садах, в школах – во внеурочной деятельности и на уроках, например, технологии и физики. На базе университета проводились робовыставки, STEM – фестивали, соревнования. Руководители учебных учреждений области обращались в вуз с просьбой прислать специалистов в области образовательной робототехники для организации занятий с обучающимися. Явно проявилась потребность в специалистах, которые могли бы организовать занятия техническим творчеством (робототехникой), оказать помощь в проведении соревнований.

Было принято решение начать работу со студентами, чтобы по окончанию вуза они имели дополнительную специализацию по направлению «Руководитель кружка технического творчества» [1].

В силу специфики области образовательной робототехники, которая требует знаний в области математики, физики и информатики, в первую очередь мы обратили внимание на студентов физико-математического факультета (ФМФ) БГПУ. Кроме этого, студенты 2-3 курса ФМФ имеют основные знания по методике преподавания упомянутых дисциплин, что облегчает подготовку студентов для организации детского технического творчества.

Сначала работа проводилась индивидуально, консультации для студентов физико-математического факультета БГПУ, инициативные студенты посещали занятия, которые проводили преподаватели с обучающимися «Школы программирования и робототехники», составляли программы курсов, проводили пробные занятия, оказывали помощь в проведении соревнований [2]. Несколько студентов смогли самостоятельно проводить занятия в группах ЦОДО.

Успешный опыт подготовки студентов к организации технического творчества позволил расширить студенческую аудиторию. При анализе спроса на занятия робототехникой, на специалистов конкретной направленности, исходя из материальной базы вуза, мы поняли, что есть необходимость привлечения для подготовки студентов других факультетов.

С целью выявления интереса со стороны студентов к робототехнике и готовности студентов к дополнительному обучению был организован опрос студентов на трех факультетах: 2-3 курсов индустриально-педагогического факультета (ИПФ), факультета педагогики и методики начального образования (ПиМНО) и 1-2 курсов физико-математического факультета (ФМФ) направления обучения «Педагогика».

Ответы студентов были объединены в характерные группы по количеству человек, количество групп 9. В данном анализе мы предлагаем к описанию три из них:

- всего анкет,
- знаю о робототехнике,
- хотели бы заниматься робототехникой.

Итоги тестирования представлены в таблице 1 и на рисунке 1.

Три факультета были выбраны не случайно. Ниже приведены основания выбора.

Например, очень много заявок на специалистов в области образовательной робототехники поступало от дошкольных учреждений и педагогов начальной школы. Студенты ФМФ испытывали сложности при работе с детьми из детских садов и младшими школьниками, сказывалось отсутствие знаний в области педагогики и психологии данного возрастного контингента, не хватало и методических основ организации занятий с обучающимися данной группы.

Для такой работы можно было привлекать студентов обучающихся на факультете педагогики и методики начального образования (ПиМНО), это будущие воспитатели и учителя начальной

Таблица 1

Результаты опроса студентов, для выявления количества студентов, желающих заниматься робототехникой

Группы	ФМФ	ИПФ	ПиМНО
Всего анкет	65	89	75
Знают о робототехнике	63	72	58
Хотели бы заниматься	42	15	24

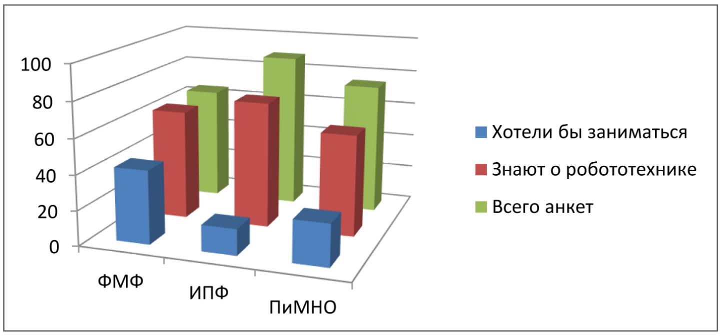

Рисунок 1 – Распределение ответов студентов по характерным группам школы. Для подготовки студентов ПиМНО нами были выбраны направления робототехники – моделирование и конструирование роботов. Когда студенты успешно освоили данные направления, провели пробные уроки, они почувствовали необходимость и желание двигаться дальше, не только конструировать роботов, но и уметь управлять ими, то есть программировать. Второй год обучения студентов ПиМНО будет проходить по направлению «Программирование для малышей».

Необходимость в студентах других факультетов, которые имеют более широкие специальные знания проявилась, в направлении «3D-моделирования». Такими знаниями, на наш взгляд, обладали будущие учителя рисования и технологии, студенты индустриально-педагогического факультета (ИПФ). Умение построить или прочитать чертеж, представить модель в пространстве, учесть цветовую гамму объекта, создать эскиз и другие навыки студентов ИПФ востребованы на занятиях по 3D – моделированию.

Особенностью подготовки студентов данной специальности оказалась возможность начать занятия по моделированию не с компьютерных программ, а с работы с бумагой и пластилином. Это является подготовительным этапом для обучающихся младшей группы для работы в пространстве, с объемными телами, умения читать и строить схемы. В следующем учебном году студенты с данной подготовкой будут проводить пробные занятия.

В 2021 году материальная база БГПУ пополнилась, при поддержке Министерства образования были открыты «Технопарк» и «Кванториум». Имеется возможность увеличить количество направлений для занятий робототехникой. Поступило оборудование для организации занятий с VR – технологиями, подводной робототехникой, расширились возможности для организации соревнований.

Соответственно, у нас появилась возможность привлечь к дополнительной подготовке студентов в области образовательной робототехники, обучающихся на иных факультетах. Например, естественно-географического факультета, биологи и географы могут попробовать свои силы в организации уроков с использованием VR-технологий (человеко-машинный интерфейс, 3D – экскурсии).

Возможно, рассмотреть организацию занятий с детьми с ограниченными возможностями здоровья.

Литература:

1. Казеева, Г. Г. Анализ подготовки будущих педагогов физико-математических специальностей к работе в условиях цифровизации экономики / Г. Г. Казеева // Современные проблемы профессионального образования: опыт и пути решения: Материалы Пятой Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Иркутск, 01–02 октября 2020 года. – Иркутск: Иркутский государственный университет путей сообщения, 2020. – С. 254-258.
2. Казеева, Г. Г. Методологические подходы к моделированию занятий техническим творчеством в аспекте развития интеллектуально-творческой активности обучающихся / Г. Г. Казеева, Ю. С. Репринцева // Школа будущего. – 2021. – № 2. – С. 148-157.

Об авторе:

Казеева Галина Геннадьевна, кафедра информатики и методики преподавания информатики, Благовещенский государственный педагогический университет, г. Благовещенск, Амурская область, Россия

About the autor:

Galina G. Kazeeva, Department of Informatics and Methods of Teaching Informatics, Blagoveshchensk State Pedagogical University, Blagoveshchensk, Russia

УДК 372.862

Казеева Г.Г., Щукина Е.А.

Анализ социальных сетей для организации образовательных занятий в школе

В статье проводится анализ использования социальных сетей образовательными учреждениями города Благовещенска. Статья рассматривает возможность организации внеклассных образовательных занятий на платформе социальных сетей.

Ключевые слова: социальные сети в образовании, внеклассные образовательные занятия

Galina G. Kazeeva, Ekaterina A. Schukina

Analysis of Social Networks for Organizing Educational Classes at School

The article analyzes the use of social networks by educational institutions in the city of Blagoveshchensk. The article considers the possibility of organizing extra-curricular educational activities on a social networking platform.

Keywords: social networks in education, extra-curricular educational activities

В современных исследованиях вопрос использования социальных сетей изучен глубоко – даны классификации, рассмотрены функции, их преимущества, описано использование социальных сетей в области образования [1, 2, 4].

В период пандемии и перевода детей на дистанционное обучение перед нами встала проблема о формы проведения занятий во внеурочное время. Ранее это были олимпиады, конкурсы, соревнования. Объявленные ограничения, сделали невозможным проведение таких мероприятий.

Цель данного исследования – посмотреть как используются социальные сети в школах г. Благовещенска Амурской области, попробовать организовать и провести с обучающимися внеклассное образовательное занятие в форме квеста.

Под внеклассным образовательным занятием мы будем понимать мероприятие, организованное в социальных сетях с целью получения новых знаний и навыков.

На первом этапе исследования мы выявили какие социальные сети используются школами города Благовещенска. Наибольшее число подписчиков оказалось на трех площадках ВКонтакте, Инстаграмм, Одноклассники. Для анализа нами были взяты 6 школ города, в которых студенты Благовещенского государственного педагогического университета (далее БГПУ) проходят практику.

Стандартный отбор через поисковую строку ВКонтакте по запросу «школа Благовещенск» выдается достаточное количество аккаунтов школ Благовещенска, начиная от общеобразовательных и заканчивая спортивными. Для анализа нами было зафиксировано количество подписчиков в социальной сети ВКонтакте по каждой из выбранных школ.

Далее было рассмотрено использование социальной сети Инстаграм в общеобразовательных учреждениях. Из 6 выбранных школ, 4 имеют ссылки на свои Инстаграм-посты со страницы образовательного учреждения в интернете. Выяснили, что активность на страницах данной социальной сети обучающихся, выбранных школ, ниже, чем ВКонтакте. Нами зафиксировано количество подписчиков Инстаграм по школам.

В сети Одноклассники было отмечено, что практически все страницы, выбранных школ, закрыты. В каждой группе в среднем 400 участников. По шапкам профиля можно утверждать, что группы созданы для личного общение, не образовательного контента: «Поговорим», «Группа для тех, кто неравнодушен» и пр. Таким образом, напрашивается вывод, что эта платформа не используется благовещенскими шкалами в качестве образовательного инструмента.

Изучив аккаунты школ, мы отметили, что все три площадки социальных сетей используются как информационное средство демонстрации жизни школы, на них представлены афиши конкурсов, рисунки обучающихся, консультации для родителей, ссылки на страницы педагогов, но не содержится информации об организации внеклассных образовательных занятий.

На диаграммах 1 и 2 представлены данные использования социальных сетей, ВКонтакте, Инстаграм, Одноклассники общеобразовательными заведениями города Благовещенска, выбранными для исследования.

На следующем этапе исследования были изучены возможности социальной сети ВКонтакте. В социальной сети можно общаться любым удобным способом: вести индивидуальное общение или создавать коллективную беседу по интересам; использовать комментирование, создавать новости в группах или на публичных страницах.

Возможности соцсети не ограничиваются одним общением. Здесь можно выкладывать собственные фотографии или видеозаписи, загружать музыку или документы.

Социальная сеть Instagram также имеет ряд потенциально полезных функций. Пользователей

Instagram привлекает дружественный пользовательский интерфейс и возможность размещать свой контент в разных группах и других социальных сетях. У пользователей есть возможность делиться видеоклипами на своих страницах, благодаря этому можно использовать Instagram в качестве микроуроков и тренингов.

В ходе исследования нами были рассмотрены возможные способы организации внеклассных образовательных занятий в социальных сетях.

Способ 1. Ученики могут создать страницу (профиль) литературного героя в социальной сети, используя все функции, которые предлагает сеть: картинки, общение, «мне нравится», ссылки, обсуждения и т.д. Самое интересное в этом процессе – стараться создать на страничке героя тот мир, который поможет лучше раскрыть его характер.

Способ 2. Экскурсии. Иногда организация экскурсии представляет трудность или невозможна – в таких случаях можно использовать функцию «прямой эфир», чтобы провести экскурсию, не покидая классной комнаты, или показать ученикам виртуальные экскурсии по крупнейшим музеям мира, интерактивные модели знаменитых сражений и т.д.

Диаграмма 1 – Доля социальных сетей, используемых общеобразовательными учреждениями города Благовещенска

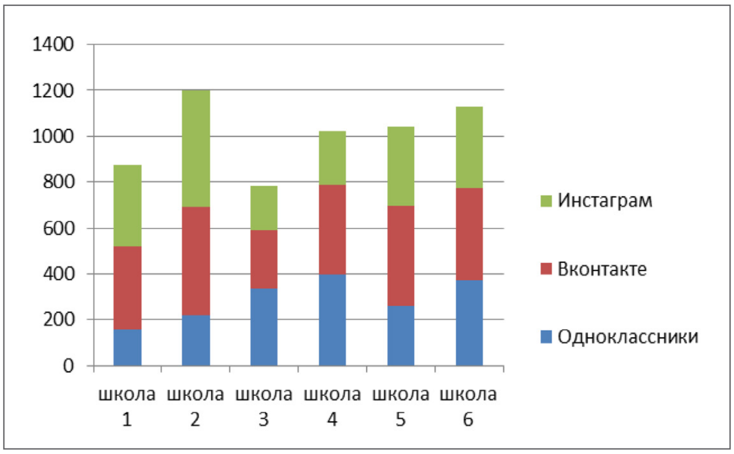

Диаграмма 2 – Использование социальных сетей общеобразовательными учреждениями города Благовещенска (количество человек)

Способ 3. Для расширения возможностей обучения, можно общаться с учениками из других классов или даже из других школ и других городов независимо от их местонахождения. Например, можно использовать сервис виртуальных конференций для общения.

Способ 4. Организация конкурсов в социальных сетях.

Заключительный этап исследования предполагал организацию и проведение внеклассного образовательного занятия. Эксперимент проводился на базе Центра организации довузовского образования БГПУ (ЦОДО БГПУ).

В группу школьников входили ученики 5-7 классов разных школ города. Занятие было организовано на основе социальных сетей ВКонтакте и Инстаграм, так как большая часть, 26 человек из 29, обучающихся пользуется этими площадками и знакома с их функциями.

Ранее нами был рассмотрен вопрос возможности подготовки студентов к работе в условиях цифровизации экономики [3]. Студентами физико-математического факультета БГПУ были продуманы задания для квеста.

Цели квеста: образовательная – закрепить навык поиска информации и использования социальных сетей; воспитательная – научиться работать в команде; развивающая – развивать логическое мышление и навык публичного выступления.

Весь квест был рассчитан на два занятия, проводился в форме детектива и включал в себя различные виды деятельности обучающихся: поиск информации в интернете, анализ и представление информации разными способами, разгадывание ребусов, представление доклада. Каждое задание было нацелено на приобретение обучающимися новых знаний и навыков.

Обучающиеся были разделены на четыре команды. В каждой команде выбирался капитан, психолог, шифровщик, эксперт, каждый член команды имел свои игровые обязанности. В процессе игры ребята должны были меняться ролями, каждый мог попробовать себя в разного рода вариациях, показать различные свои качества. Командная работа предусматривала разделение обязанностей, умение слушать друг друга и вырабатывать единое решение, взаимопомощь, уважительное отношение друг к другу.

Выбранная форма организации внеклассного образовательного занятия оказалась эффективной для достижения, поставленных целей.

По итогам исследования можно сказать, что образовательные учреждения города Благовещенска используют социальные сети, для более эффективного их использования можно рекомендовать организовывать внеклассного образовательного занятия.

Литература:

1. Бем, Н. А. Использование социальных сетей в педагогическом образовании / Н. А. Бем // Психолого-педагогический журнал Гаудеамус. – 2010. – Т. 2. – № 16. – С. 31-33.
2. Заиченко, Н. А. Школьное образование на территории социальных сетей / Н. А. Заиченко // Региональная экономика и развитие территорий: Сборник научных статей. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2019. – С. 92-99.
3. Казеева, Г. Г. Анализ подготовки будущих педагогов физико-математических специальностей к работе в условиях цифровизации экономики / Г. Г. Казеева // Современные проблемы профессионального образования: опыт и пути решения: Материалы Пятой Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Иркутск, 01–02 октября 2020 года. – Иркутск: Иркутский государственный университет путей сообщения, 2020. – С. 254-258.
4. Развитие социальных сетей и их интеграция в систему образования России / М. С. Чванова, М. В. Храмова, В. Ю. Лыскова [и др.] // Образовательные технологии и общество. – 2014. – Т. 17. – № 3. – С. 472-493.

Об авторах:

Казеева Галина Геннадьевна, кафедра информатики и методики преподавания информатики, Благовещенский государственный педагогический университет, г. Благовещенск, Амурская область, Россия

Щукина Екатерина Анатольевна, студентка, физико-математический факультет, Благовещенский государственный педагогический университет, г. Благовещенск, Амурская область, Россия

About the autors:

Galina G. Kazeeva, Department of Informatics and Methods of Teaching Informatics, Blagoveshchensk State Pedagogical University, Blagoveshchensk, Russia

Ekaterina A. Schukina, student of the Faculty of Physics and Mathematics, Blagoveshchensk State Pedagogical University, Blagoveshchensk, Russia

УДК 378.14

Киселев Б.В., Краснова Е.Л.

Сквозные цифровые технологии в проектировании симулятора педагогической деятельности

В статье рассматривается теория применения сквозных цифровых технологий в образовательном процессе с применением симулятора педагогической деятельности. Определяются положительные моменты применения данных технологий в структуре практической деятельности ВУЗа. Выделяются проблемы, с которыми сталкиваются разработчики информационных программ.

Ключевые слова: цифровые сквозные технологии, симулятор педагогической деятельности, виртуальная реальность, искусственный интеллект

Boris V. Kiselev, Elena L. Krasnova

End-To-End Digital Technologies in Designing a Simulator of Pedagogical Activity

The article repeats the theory of the use of digital technologies in the educational process with the use of imitation of pedagogical activity. The advantages of using data technologies in the specific practical activities of the university are determined. Problems with the appearance of external information programs are considered.

Keywords: digital end-to-end technologies, pedagogical activity simulator, virtual reality, artificial intelligence

Тема применения сквозных технологий, а именно виртуальной реальности и искусственного интеллекта на данном историческом этапе имеет серьезную теоретическую базу [1]. Практическое применение остается актуальной задачей для разработчиков и методистов высших учебных заведений. Интересным решением можно отметить активное вовлечение одаренных студентов в проект через научные кружки.

Необходимо понимать насколько расширятся возможности искусственный интеллект (далее ИИ) в симуляторе педагогической деятельности, которую используют молодые специалисты перед первыми занятиями в классе. ИИ значительно повышает степень логической информационной цепочки в программе и позволяет приблизить поведение виртуальных персонажей к реальной обстановке в школе.

Как показали занятия с применением очков виртуальной реальности, степень погружения в атмосферу изучаемого предмета повышается с математической прогрессией и как следствие интерес к изучаемому предмету становиться выше. Моделирование наглядно демонстрирует уровень подготовки пользователя и беспристрастно определяет слабые стороны в умениях и знаниях начинающего педагога.

Предпосылками внедрения сквозных технологий в процесс создания симулятора педагогической деятельности можно считать следующие факторы:

- Повышение объективности в оценке знаний;
- Возможность интеграции сквозных технологий в связи с развитием технического прогресса;
- Использование генеративного дизайна и параметрического моделирование в конструкции симулятора [2];
- Применения информационных платформ с открытым кодом доступа;
- Использование программы для контроля качества;
- Использование Интернета в совместном ведении проекта группой разработчиков и методистов;
- Виртуальная, дополненная и смешанная реальность становиться доступной через внедрение технопарков в педагогических ВУЗах;
- Программное обеспечение позволяет автоматизировать рутинные действия преподавателя с документацией.
- Снимается стресс начинающего педагога при работе в школе.

Отметим факторы тормозящие эффективность применения данных технологий в современной педагогической деятельности:

- Внедрение нового продукта оставляет риски получить продукт, отличающийся от начального представления разработчиков;
- Отсутствие понимания сроков внедрения продукта;
- Отсутствие рынка специалистов в данной области.

Однако, несмотря на проблемы, перевес в сторону изучений этой области очевиден. Первые шаги показали насколько эффективно работает симулятор педагогической деятельности в подготовке студентов и активизации профориентационной работы с педагогами, имеющими большой опыт профессиональной деятельности[3].

В результате, применения симулятора педагогической деятельности на практике, у обучающихся формируются все необходимые компетенции будущего учителя, ведь основная идея симулятора – это сделать так, чтобы студент понял, что осуществляет сценарий урока верно, именно в соответствии деятельностного подхода (студент выступает в роли наставника).

Таким образом, цифровой симулятор – это универсальный инструмент, с помощью которого можно заложить любое содержание и осуществлять такие процессы как: планирование, прогнозирование, анализ и обработка данных. Применение симулятора позволяет внести в педагогический процесс, в подготовку кадров много нового, интересного и эффективного.

Литература:

1. Галакберова А.А, Галямова Э.Х., Киселев Б.В. «Основы проектирования цифровых симуляторов для подготовки учителя математики» (ВАК) в журнале Вестник Мининского университета Том 8, № 4 (2020);
2. Филатова З.М., Киселев Б.В. статья «AR technologies in education to motivate for learning» (СКОПУС) в журнале INTED2021 15th annual International Technology, Education and Development Conference Испания, г. Валенсия 2021 г.;
3. Матвеев С.Н., Галямова Э.Х., Киселев Б.В. «О статистической оценке внедрения обучающих математических тренажеров-симуляторов в обучение» (ВАК) крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского» (г. Ялта) «Проблемы современного педагогического образования» №71 (1) 2021 г.

Об авторах:

Киселев Борис Васильевич, старший преподаватель, ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», г. Набережные Челны, Россия

Краснова Елена Леонидовна, кандидат педагогических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», г. Набережные Челны, Россия

About the autors:

Boris V. Kiselev, Senior Lecturer, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia

Elena L. Krasnova, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia

УДК 371.695

Мошкова Е.С.

Использование Google-форм в образовательном процессе

В данной статье подробно рассматриваются возможности онлайн-сервисов Google в процессе организации образовательной деятельности: инструменты сервиса Google Docs, примеры использования их в образовании, варианты создания всевозможных опросников, анкет и тестов с автопроверкой, с подсчетом баллов за каждый ответ. Наибольшее внимание в статье уделяется Google-формам – инструменту для организации автоматизированной обратной связи.

Ключевые слова: онлайн-сервис, образование, цифровые образовательные технологии, Google

Ekaterina S. Moshkova

Using Google Forms in the Educational Process

This article discusses in detail the possibilities of Google online services in the process of organizing educational activities: the tools of the Google Docs service, examples of their use in education, options for creating all kinds of questionnaires, questionnaires and tests with auto-check, with scoring for each answer. The greatest attention in the article is given to Google forms – a tool for organizing automated feedback.

Keywords: online service, education, digital educational technologies, Google

Основная функция образования – всестороннее развитие личности. Сегодня одной из главных задач современного образования является способность научить человека учиться и обучить эффекно взаимодействовать во время учебного процесса, то есть сформировать способность целенаправленно осваивать профессиональные навыки, развивать умение коммуницировать, искать и обрабатывать данные, проявлять свой творческий потенциал, найти свой путь к самовыражению и реализации своей личности в жизни. Основная проблема современной дидактики – это выбор оптимального соотношения лучших традиций существующей образовательной системы, инструментария информационных технологий, современных педагогических инноваций и тенденций. Одна из проблем сегодня – это необходимость найти наиболее эффективные цифровые технологии в образовании, которые бы помогли в решении данной проблемы. Онлайн сервисы Google − инструмент учебной и образовательной деятельности, ориентированный на динамические изменения во внешнем мире, основан на развитии различных форм мышления, творческих навыков, высоких социальных и адаптационных возможностей личности.

Компания Google постоянно выпускает новые продукты, которые имеют различные функции. Прекрасным вариантов дополнения занятий могут стать сервисы Google Диск, они достаточно легкие и удобные в использовании. Такое сотрудничество предоставляет возможность сделать процесс обучения более свободным как для студентов, так и для преподавателей. С помощью данного сервиса есть возможность организовать групповую работу с документами (к примеру, вместе создавать презентации), проводить опросы и тестирования, создать структурированную коллекцию электронных документов. Благодаря использованию Google-форм возможно осуществлять сбор ответов на задания, что позволит организовать их проверку в удобное для преподавателя время. Наиболее востребованы следующие функции Google Docs [5]:

- Google Документ – это средство для написания коллективной, преимущественно текстовой работы, например, создания выпуска образовательной газеты, или организация проведения проверочных и контрольных работ.
- Google Презентация – обучающиеся готовят свои выступления к занятию; на уроке можно создавать совместную работу по заданной теме, распределить обязанности каждому участнику (оформление определенных слайдов, поиск конкретной информации, отвечт на вопросы).
- Google Таблица – как правило, применяется в качестве основы для создания кроссвордов или же для проведения исследования на занятии, а также обобщенной сводной ведомости результатов работы обучающихся.
- Google Рисунок – выполнение проверочных заданий, изменение уже имеющихся рисунков в соответствии с заданием.
- Google Форма – используется для проверки знаний, для создания анкет или тестирования.

Онлайн-сервис Google формы – это отличный вариант для того, чтобы быстро получить обратную связь от обучающихся. В сервисе Формы Google можно создать разнообразные опросы и тесты с автоматической проверкой, подсчетом баллов за каждый ответ [1].

В качестве примера использования формы Google в образовании можно привести следующие:

- регистрация участников образовательных проектов;
- промежуточная проверка знаний, викторина, опрос, анкетирование;
- организация работы в группе, оценка и самооценка,
- проведение рефлексии.

Преимущества использования Google-форм:

- Бесплатное использование сервиса
- Есть возможность использования сервиса с телефона
- Хранятся неограниченное количество времени
- Различные типы вопросов
- Настраивается автоматическая проверка
- Регистрация участников необязательна
- Можно встроить видеоролик, изображение
- Есть возможность оставлять комментарии к ответам
- Отсутствие проблем технического характера

Недостатки:

- В тестировании нет возможности добавить ограничение по времени
- Можно проходить тест неограниченное количество раз (без регистрации)
- Нет базы готовых задач и вопросов
- Нет возможности использования многвариантности

В шаблоне Google форм предлагается 10 вариантов заданий [2]:

1. Текст (строка): короткий ответ, умещающийся в одну строку. Это удобно использовать при внесении информационных данных, например, фамилия, имя отчество обучающимися, указание курса и группы, адреса электронной почты. Такой вариант шаблона удобен и для краткого ответа на поставленный вопрос. Стоит отметить, что в такой шаблон вопроса можно включить несколько правильных вариантов ответов
2. Текст (абзац): длинный символьный ответ, который состоит из нескольких предложений. Ответ необходимо вписать самостоятельно.
3. Один из списка: выбирается один правильный ответ из множества предложенных вариантов.
4. Несколько из списка: подходит для вопросов, включающих в себя несколько правильных ответов, которые необходимо отметить галочкой.
5. Раскрывающийся список: необходимо выбрать только один правильный ответ из раскрывающегося списка.
6. Шкала: можно оценить степень согласия или несогласия обучающегося с текстом или для оценки чего-то (например, выставление оценки по шкале от 1 до 5)
7. Сетка (множественный выбор): таблица, состоящая из нескольких строк, в каждой из которых можно выбрать один правильный ответ. Подходит для выполнения заданий, в которых нужно найти соответствие.
8. Сетка флажков: это тип вопроса, который предполагает оценку параметров согласно нескольким критериям.
9. Дата: ответ на вопрос о точной дате – с указанием числа, месяца, года.
10. Время: аналогичен заданию по Дате и означает указание конкретного значения часов, минут и секунд.

Важно отметить также и то, что тест можно дополнять видеоклипами, картинками, текстом. А значит, что весь материал для занятия может можно собрать в одной форме.

В настройках теста можно задать автоматическую проверку, когда обучающийся видит свои допущенные ошибки. Это позволяет студенту проверить свой уровень усвоения материала, а преподавателю – наблюдать за прогрессом обучающихся и своевременно вносить коррективы.

Использование этих сервисов позволяет преподавателю видеть подробные результаты, какие задания вызвали у студентов затруднения, какие неправильные варианты ответов чаще всего выбирались, как справились все обучающиеся.

В качестве примера использования сервиса Google форм предлагается тест, который создан для определения уровня знаний обучающихся по теме «Логические элементы компьютера», где использованы задания разного типа, например:

Использование видеоролика (рисунок 1).

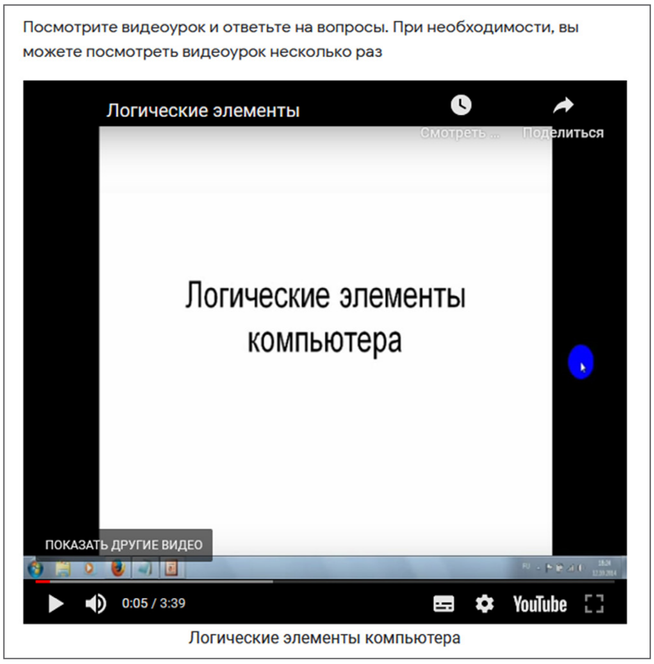

Рисунок 1 – Использование видеоролика в Google формах

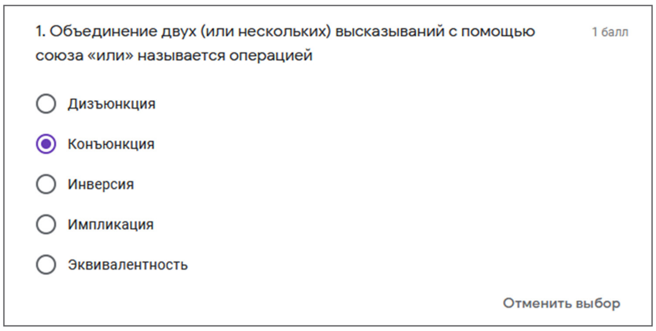

Рисунок 2 – Задание с единичным ответом в Google формах

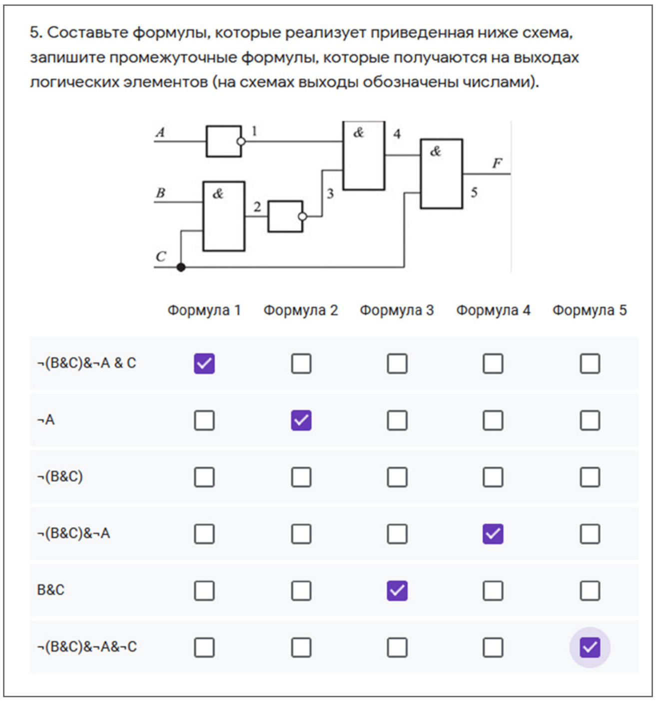

Рисунок 3 – Задание с множественным выбором в Google формах

Обучающимся предлагается посмотреть видеоурок для повторения пройденного материала или освоения нового [3]

Задание с единичным выбором (рисунок 2).

Задание с множественным выбором (Рисунок 3).

Ответы студентов сохраняются и доступны преподавателю в нескольких форматах:

1. Сводка результатов по каждому вопросу с указанием количества правильных и неправильных ответов,
2. Результатов по каждому ученику в отдельности с указанием правильных и неправильных ответов, ответов, данных учеником, набранных им баллов за каждый вопрос;
3. В формате таблицы, где можно настроить условное форматирование таким образом, чтобы все правильные ответы автоматически выделялись для наглядности другим цветом.

Благодаря этому сервису, преподаватель сможет грамотно выстроить работу на уроке, с учетом всех проблемных моментов, поработать их.

Работая с Google-формой, студенты получают такой же отклик от системы с информацией о правильных и ошибочных ответах, могут увидеть, где именно они ошиблись, использовать возможность скорректировать пробелы, если необходимо, например, еще раз просмотрев видеоролик. Также у преподавателя есть возможность использовать функцию комментирования, тогда обучающийся увидит пояснения, почему данный им ответ является неправильным, что он упустил, не увидел, на что стоит акцентировать свое внимание в будущем.

Подводя итог, с уверенность можно сказать, что сервисы Google, обладают достаточно высокими возможностями в сфере образования и саморазвития. Их изучение и внедрение в практическую деятельность преподавателя формируют условия для совершенствования и автоматизации процесса образования и воспитания.

Литература:

1. Как создать форму https://support.google.com/drive/answer/87809?hl=ru
2. Презентация Инны Пендикяйнен «Google-документы: формы» https://docs.google. com/presentation/d/1f0uQjrAV735ndpvkPNA26AofQVNHDS17bblS-g5IV0/present#slide=id.i0
3. Создание тестов https://edugalaxy.intel.ru/index.php?automodule=blog&blogid=6885&showentry=2815
4. Якуба Сергей. Сервисы Google для образования. Часть 1 / Якуба Сергей и др. / М.: Издательские решения 2017

Об авторе:

Мошкова Екатерина Сергеевна, преподаватель, ГБПОУ Самарской области «Самарский социально-педагогический колледж», г. Самара, Россия, moshkovaes@mail.ru

About the autor:

Ekaterina S. Moshkova, Teacher, State Budgetary Professional Educational Institution of the Samara Region “Samara Social and Pedagogical College”, Samara, Russia, moshkovaes@mail.ru

УДК 007.51

Филатова З.М., Гарипова Р.Ф.

Разработка информационной системы по учету оказанных издательских услуг

С увеличением информационных потоков повысились и требования к скорости обработки данных. В современном предприятии большое количество информации не может быть обработано вручную. Для облегчения этого процесса требуется использование автоматизированных информационных систем. В данной статье представлена модель разработки автоматизированной информационной системы по оказанию издательских услуг обучающимся по направлению 09.03.03 Прикладная информатика, профиль «Прикладная информатика в дизайне» я рамках подготовки курсовой работы по дисциплине «Проектирование информационных систем». Определены этапы создания автоматизированной информационной системы, в рамках которой продемонстрированы некоторые алгоритмы по построению объектов подсистемы в режиме конфигуратора и 1С: Предприятие. Разработанная автоматизированная информационная система позволяет предоставить необходимую информацию по запросу администрации, руководителя или отдельно взятого специалиста структурного подразделения в виде документа, заказа или отчета по оказанию тех или иных издательских услуг.

Ключевые слова: автоматизированная информационная система, бизнес-процесс, входные и выходные данные, издательские услуги, информационная система, конфигуратор, модель, организация, подсистема

Zulfiya M. Filatova, Regina F. Garipova

Development of an Automated Information System for Accounting for Publishing Services Rendered

With the increase in information flows, the requirements for data processing speed have also increased. In a modern enterprise, a large amount of information cannot be processed manually. To facilitate this process, the use of automated information systems is required. This article presents a model for the development of an automated information system for the provision of publishing services to students in the direction of 09.03.03 Applied Informatics, profile «Applied Informatics in design» as part of the preparation of a course work on the discipline «Designing information systems». The stages of creating an automated information system are defined, within which some algorithms for constructing subsystem objects in the configurator and 1C: Enterprise mode are demonstrated. The developed automated information system allows you to provide the necessary information at the request of the administration, the head or a single specialist of a structural unit in the form of up to.

Keywords: automated information system, business process, input and output data, publishing services, information system, configurator, model, organization, subsystem

Мы живем в мире информационного избытка. С каждым годом объем информации увеличивается в разы. Человек не в силе управлять с большими объемами данных. Для того, чтобы облегчить обработку, хранение и использование информационных потоков начали создавать программные средства управления и автоматизации производственным процессом. Эти продукты получили такое название как автоматизированная информационная система. Такого рода системы почти полностью охватили процесс сбора и обработки большого объема информации.

Анализ работ [2, 3, 6-8], посвященных теоретическим и практическим разработкам в области применения автоматизированных информационных систем, позволяет выделить определения сущности и назначения информационных систем. Под информационной системой (ИС) организации будем понимать среду (совокупность взаимодействующих между собой подсистем), обеспечивающая целенаправленную организацию путем обработки и передачи информации [7], Основное назначение ИС – создание современной инфраструктуры для управления предприятием, организацией или учреждением.

В рамках нашей работы представим автоматизированную информационную систему по оказанию издательских услуг, которая может быть использована для усовершенствования и/или ускорения производственных процессов, таких как формирование заказа, выпуск книжной продукции, предоставление услуг при реставрации и печати книжных изданий. Информационная система по оказанию издательских услуг имеет название «Рассвет» и рассчитана на 25-50 автоматизированных рабочих мест. Для осуществления деятельности организации «Рассвет» были определены следующие подразделения: администрация; бухгалтерия, рекламно-издательский отдел, типография, отдел качества, отдел снабжения и сбыта. При создании информационной системы все функции были автоматизированы с привлечением инструментальных возможностей программной среды «1С: Предприятие 8.3». Разработка автоматизированной ИС проходила в несколько этапов, которые были ограничены некоторыми временными рамками.

1 этап. Проектирование автоматизированной ИС. Начальным этапом процесса разработки информационной системы по оказанию издательских услуг является проектирование автоматизированной ИС или определение модели бизнес-процессов, протекающих в организации для реализации поставленной цели и задач перед сотрудниками. Под бизнес-процессом будем понимать совокупность различных видов деятельности, которые создают результат, имеющий ценность для потребителя. Бизнес-процесс – это цепочка работ (функций), результатом которой является продукт или услуга. Каждый бизнес-процесс имеет свои очерченные границы и роли [4]. Вследствие этого проектная часть по разработке, автоматизированной ИС по оказанию издательских услуг необходимо строить с привлечением возможностей представления информационных потоков при помощи схем или диаграмм. Построение таких графических представлений данных осуществляется с применением инструментальных возможностей унифицированного языка моделирования Unified Modeling Language (UML) [10], где основными связующими элементами выступают диаграммы, ее виды, назначения и связи между классами.

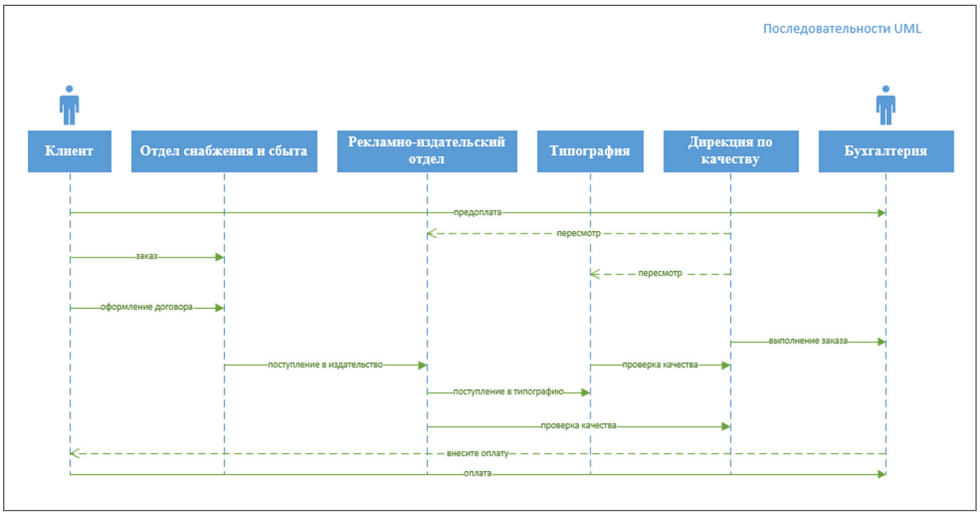

Рисунок 1 – Процесс записи клиента на предоставление издательской услуги

Входными данными для функционирования одного из информационного процесса является запись клиента на предоставление издательской услуги, а выходными – полученный результат по оказанию издательской услуги, который, как правило, затрагивает все подразделения организации «Рассвет». Процедура оформления договора по оказанию издательских услуг является типовой, после оформления договора клиенту необходимо внести предоплату за оказанную услугу. В это время необходимые документы по запросу специалиста, отвечающего за определённый фронт работы и имеющий определенные права доступа, отправляются сначала в издательский, а потом в производственный отдел. На диаграмме последовательности, см. рисунок 1 показано, что отдел качества в случае обнаружения недочетов может перенаправить работу обратно на пересмотр, либо же составить выходной документ – отчет эксперта. Одновременно с этим отчетом предоставляется издательская услуга, в нашем случае готовый продукт на оплату.

2 этап. Создание базы данных, автоматизированной ИС. Следующим этапом разработки автоматизированной ИС является создание базы данных ИС в программной среде «1С:Предприятие 8.3», которая позволяет оптимизировать деятельность организации по оказанию издательских услуг. Встроенные механизмы данной среды могут «приспосабливаться» к особенностям конкретной области деятельности и обеспечивают обмен данными различных форматов, поддержку протоколов обмена и стандартов взаимодействия других подсистем, а также получение доступа ко всем объектам системы. Для каждой определенной задачи в программной среде предусмотрен отдельный удобный механизм или инструмент.

Построение функционала автоматизированной информационной системы по оказанию издательских услуг начинается с процесса конфигурирования, где осуществляется реализация сформированной ранее модели организации средствами системы. После того как сформирована модель ИС осуществляется ее исполнение, т.е. производится обработка данных автоматизированный ИС по оказанию издательских услуг. На рисунке 2-3 представлен процесс создания подсистем для автоматизации деятельности организации «Рассвет» в режиме конфигуратора.

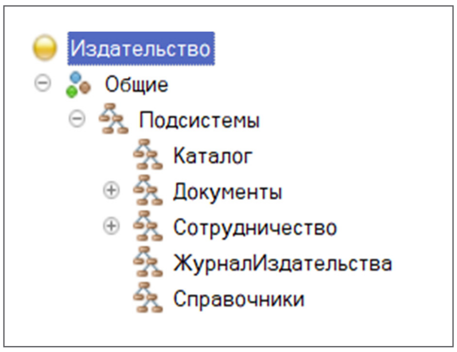

Рисунок 2 – Подсистемы

В разработанной автоматизированной ИС предусмотрена возможность предоставления прав доступа для каждого отдельного специалиста организации, разработки запросов по формированию отчётной документации и сведений о выполненных работах по оказанию издательских услуг. Права пользователя могут быть ограничены просмотром записей и формированием отчетов. Однако в зависимости от должности сотрудника и спектра его выполняемых работ, в системе есть возможность добавлять и/или изменять определенные права пользователя. В подсистеме «Каталог» представлены книжные продукции, которые есть в

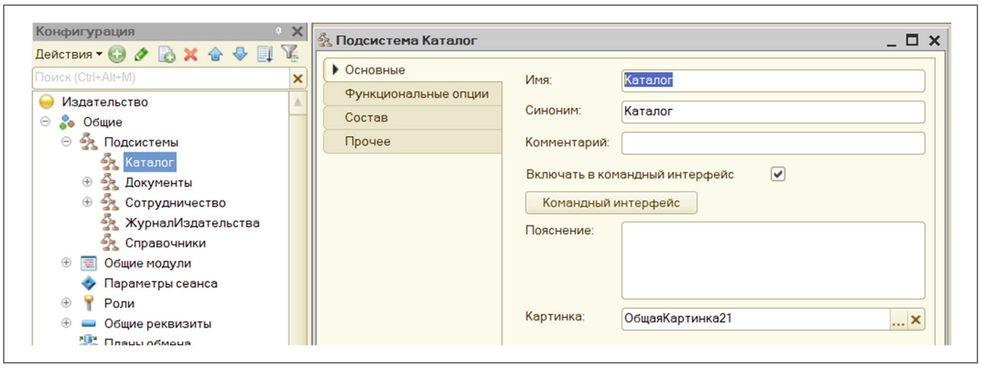

Рисунок 3 – Определение иконок для подсистем

наличии. Подсистема «Журнал издательства» предназначена для аналитики выпускаемой продукции, а также для реализации функций формирования, контроля и согласования издательских услуг. Подсистема «Сотрудничество» ориентирована на решение вопросов информационного обеспечения процессов взаимодействия с потребителями и партнерами. В подсистеме «Документы» собраны все отчеты. Подсистема «Справочники» содержит в себе второстепенные разделы. На рисунке 4 в режиме 1С: Предприятие реализован пользовательский интерфейс сотрудника организации «Директор».

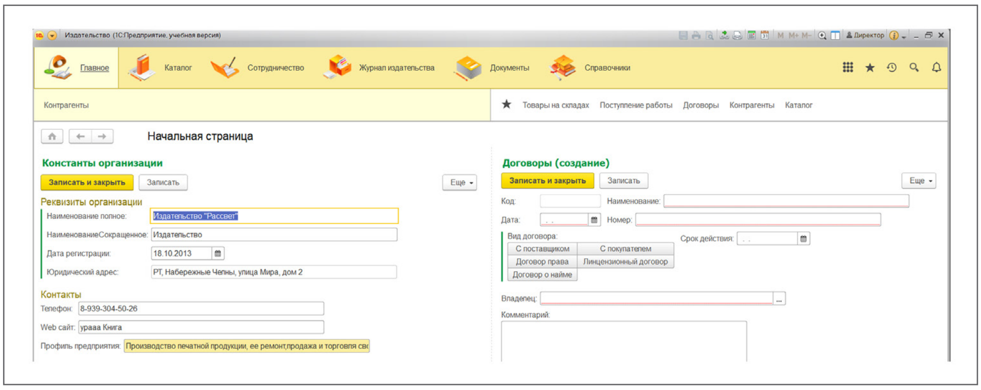

Рисунок 3 – Определение иконок для подсистем

3 этап. Тестирование и отладка автоматизированной ИС. Завершающим этапом разработки автоматизированной ИС является тестирование и отладке программного продукта. На этом этапе все процессы сбора и хранения информации по оказанию издательских услуг должны быть адаптированы для нужд и запросов сотрудников организации «Рассвет». Целью тестирования программного продукта должна являться оценка качества работоспособности всех заявленных функций, подсистем и программы в целом.

В настоящее время в деятельности различных организаций активно используются информационные технологии. Главная роль информационных технологий связана с тем, что на сегодняшний день наряду с человеческим капиталом и финансовыми ресурсами информация обретает одно из главных значений в деятельности любой организации, причем роль информации с каждым годом всё больше и больше возрастает. Следовательно, многие организации имеют необходимость в автоматизированных информационных системах, целью которых являются предоставление необходимой информации по запросу пользователя.

Литература:

1. Александров, Д.В. Моделирование и анализ бизнес-процессов: учебник / Д.В. Александров. – Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2017. – 227 с.
2. Астапчук, В.А. Корпоративные информационные системы: требования при проектировании: учебное пособие для вузов / В.А. Астапчук, П.В. Терещенко. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 113 с.
3. Богатырев, В.А. Информационные системы и технологии. Теория надежности: учебное пособие для вузов / В. А. Богатырев. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 318 с.
4. Грекул, В.И. Проектирование информационных систем: учебное пособие / В.И. Грекул, Г.Н. Денищенко, Н.Л. Коровкина. – 3-е изд. – Москва: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2020. – 299 с.
5. Долганова, О.И. Моделирование бизнес-процессов: учебник и практикум для вузов/ О.И. Долганова, Е.В. Виноградова, А.М. Лобанова; под редакцией О.И. Долгановой. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 289 с.
6. Информационные системы и технологии в экономике и управлении в 2 ч. Часть 1 : учебник для вузов / ответственный редактор В.В. Трофимов.

– 5-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 375 с.
7. Информационные системы управления производственной компанией: учебник и практикум для вузов / под редакцией Н.Н. Лычкиной. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 249 с.
8. Одинцов, Б.Е. Информационные системы управления эффективностью бизнеса: учебник и практикум для вузов / Б.Е. Одинцов. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 206 с.
9. Радченко, М.Г. «1С: Предприятие 8.3. Практическое пособие разработчика» / М.Г. Радченко, Е.Ю. Хрусталева, 2013. – 965 с.
10. Самуйлов, С.В. Объектно-ориентированное моделирование на основе UML: учебное пособие / С.В. Самуйлов. – Саратов: Вузовское образование, 2016. – 37 с. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/47277.html (дата обращения: 12.12.2021).

Об авторах:

Филатова Зульфия Мирсайжановна, кандидат педагогических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», г. Набережные Челны, Россия, czmfzm@mail.ru

Гарипова Регина Фидусовна, студентка, ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», г. Набережные Челны, Россия

About the autors:

Zulfiya M. Filatova, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia, czmfzm@mail.ru

Regina F. Garipova, student, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia

СЕКЦИЯ 4. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

УДК 51.0

Краснова Е.Л., Герасимова О. Ю.

Проблемы и актуальность математического образования

В статье рассмотрен вопрос о необходимости обоснования научного направления – педагогика математического образования (математическая педагогика), которая изучает математические методы и модели в различных процессах и явлениях. Показана что ее существование необходимо для подготовки высококвалифицированного специалиста в различных отраслях, и она отвечает требованиям научного направления.

Ключевые слова: математическая педагогика, математическая модель, научное направление

Elena L. Krasnova, Olga Yu. Gerasimova

Problems and Relevance of Mathematical Education

The article considers the need to substantiate the scientific direction – pedagogy of mathematical education (mathematical pedagogy), which studies mathematical methods and models in various processes and phenomena. It has shown that its existence is necessary for the training of a highly qualified specialist in various industries, and it meets the requirements of the scientific direction.

Keywords: mathematical pedagogy, mathematical model, scientific direction

Очень большой интерес в современной реальности вызывает математика у учащихся средних образовательных организаций. Ребята очень глубоко осознают именно то высказывание, «математика – это царица наук». Математический язык сейчас является одной из основ гуманитарных наук и очень быстро проникает в них. Гуманитарные науки очень тесно сопряжены с общественными науками, социальными науками (музыка, экономика, культурология и т.д.).

Применение математических методов в педагогике позволяет решать ряд проблем:

- планирование и реализация экспериментов с участием различных социальных групп и возрастов;
- анализ и реализация полученных результатов от экспериментов;
- «построению качественных моделей различных проблем обучения и воспитания» [2, с.14]. Кроме того, как справедливо утверждает А. М. Новиков [3, с.55], «математические средства позволяют систематизировать эмпирические данные, выявлять и формулировать количественные зависимости и закономерности … используются как особые формы идеализации и аналогии (математическое моделирование)».

Для того чтобы уровень математического образования в педагогических вузах держать на высоком уровне, а также поддерживать интерес и желание учащихся заниматься математикой, необходимо при вузах создавать математические центра.

Стратегией деятельности математического центра является «Повышение уровня исследований в области математики и качества всех уровней математического образования».

Цели деятельности Центра:

- Создание единой образовательной среды;
- Взаимодействие с ведущими научными и образовательными центрами России;
- Обеспечение конкурентоспособными специалистами в различных сферах.

Направления деятельности математического центра:

1. Создание системы очно-заочных городских математических кружков;
2. Организация конкурсов, турниров, фестивалей по математике;
3. Дистанционное обучение и консультирование школьников;
4. Индивидуальное и групповое консультирование школьников;
5. Математические сборы и лагерные смены;
6. Занятия по предметам математического цикла с учащимися;
7. Организация научно-популярных лекций для поддержки интереса школьников к математике и смежным областям.

Именно дополнительное, более углубленное изучение математики, олимпиадной математики в центре позволяет повысить уровень математического образования как в регионе, так и в стране в целом.

Должное значение при обучении математики в математических центрах должно иметь такое направление как, научно-исследовательское. Ребята должны знать, что такое исследование, эксперимент, прогноз результатов и апробация их в практическую реальность. Они должны учиться проводить эксперименты, прогнозировать и анализировать результаты экспериментальной и научной деятельности, осознавать их востребованность и эффективность воздействия и самое главное нести ответственность за корректность применения конкретных методов и результатов.

Для преподавания в таких Центрах необходимо привлекать молодых, интересных, креативных специалистов. Преподаватели должны быть педагогами, наставниками, интересными людьми и конечно же победителями различных всероссийских олимпиад, конкурсов и т.п.

Для того чтобы вырастить таких специалистов, которые смогут дать ребятам математические знания на высоком уровне, необходимо внести изменения в образовательные программы педагогического направления. Опять же возвращаясь к качеству математического образования, можно с уверенностью сказать, что проблема не высокого уровня его качества кроется в содержании математических программ.

На сегодняшний день в учебных планах по дисциплинам математического образования очень сильно занижен объем часов и отсутствуют ряд дисциплин такие дисциплины, как «Математические методы в педагогических исследованиях», «Введение в экспериментальную педагогику» и др ,которые необходимо изучать. Все это свидетельствует о разрыве между математической подготовкой и проведением научно-исследовательской деятельности. Все это говорит о тех причинах, которые способствуют снижению качества математического образования. Все, о чем говорилось выше, констатирует факт развития нового направления в педагогической деятельности – педагогика в математическом образовании, другими словами «математическая педагогика».

Как мы говорили ранее, «математика – это царица наук», она используется в различных сферах деятельности (производство, экономика, маркетинг и т.д.) для осуществления таких процессов как планирование, прогнозирование, статистической обработки результатов исследований, но также она используется и в педагогических исследованиях для разработки и построения математических моделей различных педагогических явлений и процессов.

Развитие информационных технологий имеет особое место в педагогических исследованиях. Новые возможности и применение новых информационных систем дает более широкое и качественное проведение исследований, например, создание симулятора педагогической деятельности, как тренажера для обучающихся.

Информатизация педагогики и педагогических исследований позволило на высоком уровне развиваться математической педагогики.

Подводя итог следует отметить, что необходимо решать ряд задач, которые стоят перед математической педагогикой на современном этапе:

- разработка технологии математического моделирования;
- определение основных направлений информатизации в сфере образования.

Литература:

1. Битинас Б. П., Многомерный анализ в педагогике и педагогической психологии. – Вильнюс, 1983. – 347 с.
2. Гнеденко Б. В., Математика как орудие педагогического исследования // Применение математических методов и ЭВМ в педагогических исследованиях: Сб. науч. тр. – Свердловск: Изд-во СГПИ, 1989. – С. 6–22
3 Новиков Д. А., Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи). – М.: МЗ-Пресс, 2004. – 67 с

Об авторах:

Краснова Елена Леонидовна, кандидат педагогических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», г. Набережные Челны, Россия

Герасимова Ольга Юрьевна, кандидат педагогических наук, и.о. зав каф ИиВМ, ФГБОУ ВО «Набережночелнинский государственный педагогический университет», г. Набережные Челны, Россия, gerola1970@mail.ru

About the autors:

Elena L. Krasnova, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia

Olga Yu. Gerasimova, Candidate of Pedagogical Sciences, Acting Head of the IiVM Department, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhnye Chelny, Russia, gerola1970@mail.ru

УДК 373.5

Тарас О.Б.

Роль истории математики в математическом образовании

В данной статье показана роль математического образования в современном обществе, проанализировано значение истории математики в математическом образовании. Рассмотрены преимущества изучения истории математики с помощью видеоуроков. Продемонстрированы преимущества московской электронной школы при изучении истории математики.

Ключевые слова: математика, история, математическое образование, математическая грамотность, видеоурок, информационные технологии

Olga B. Taras

The Role of The History of Mathematics in Mathematical Education

This article shows the role of mathematical education in modern society, analyzes the importance of the history of mathematics in mathematical education. The advantages of studying the history of mathematics with the help of video tutorials are considered. The advantages of the Moscow electronic school in the study of the history of mathematics are demonstrated.

Keywords: mathematics, history, mathematical education, mathematical literacy, video tutorial, information technology

Математическое образование всегда переживало подъемы и неудачи, о чем убедительно свидетельствуют исторические факты. В настоящее время наше общество по-прежнему нуждается в поиске и реализации оптимальных путей совершенствования математического образования. При этом в любом случае современные события следует осмысливать в историческом контексте, поскольку во многом именно ретроспективный анализ исторических материалов позволяет выявить те условия и закономерности, которые оказали решающее значение для становления системы математического образования в России на определенном временном этапе и создали предпосылки для дальнейшего ее развития.

Математика играет особую роль в современном образовании, в связи с чем важным является заинтересованность учащихся интерес к обучению математике посредством различных методов и средств. Побуждение мотивации к обучению математике можно назвать одной из центральных проблем математического образования. Следует согласиться с учеными Ю.А. Дробышевым и И.В. Дробышевой в том, что элементы истории математики способствуют повышению мотивации учащихся [3, с. 76].

В формировании и развитии у обучающегося математического образования, в том числе на основе изучения истории математики, несомненна роль педагога и его педагогического мастерства. При этом, важно правильно представить исторический материал, связанный с тем или иным математическим понятием, его появлением, свойствами, характеристиками. Педагог с помощью истории математики помогает обрести у учащихся математическую грамотность, а именно, способность распознавать проблемы, возникающие в окружающей действительности и которые можно решить средствами математики; формулировать эти проблемы на языке математики; решать эти проблемы, используя математические факты и методы; анализировать использованные методы решения; интерпретировать полученные результаты с учетом проблемы; формулировать и записывать результаты решения. По словам М.Ф. Гильмуллина, история математики предоставляет множество примеров, в которых именно в рамках такой структуры происходит постановка проблемы решения некоторой конкретной задачи, а затем компетентные люди переводят их на язык науки, причем нередко решение проблемы растягивается на долгие годы [2, с. 299].

Учитывая неоспоримую роль истории математики в математическом образовании, важно то, как педагог преподнесет соответствующий материал. Учитывая стремительно развивающиеся информационные технологии, их можно активно применять в педагогической деятельности. Так, например, повышению интереса к изучению истории математики, ее роли в математическом образовании способствуют применение соответствующих видеоматериалов. И.П. Михайлов справедливо считает видеоматериалы одним из главных видов информационного контента современного общества [4, с. 137].

Видеоматериалы об истории математики могут быть представлены по-разному:

- как форма обучающего медиаконтента, с помощью которой можно наглядно и пошагово представить историю математики;
- как форма организации обучения истории математики с использованием мультимедийных технологий;
- как видеоролики с изложением учебного материала по истории математики с использованием рисунков, схем, видеоматериалов;

- как уроки с использованием видеофрагментов познавательного характера, позволяющих изучить историю математики;
- как записи реальных занятий по истории математики, проведенных педагогами;
- как слайды, сопровождаемые голосовыми комментариями.

Е.В. Александрова, обосновывая роль видеоуроков как системообразующего элемента цифровой образовательной среды, высказывает мнение, что они обеспечивают возможность для уточнения, прояснения и углубленного изучения учебного материала [1, с. 9].

Изучение истории математики и объяснение ее роли в математическом образовании посредством видеоуроков обладает все всякого сомнения рядом достоинств, например:

- оригинальная форма подачи материала об истории математики, что при правильной организации должно побудить у обучающихся повышенный интерес к математике, поскольку знания становятся более доступными для восприятия;
- обеспечивается возможность представления большого числа данных и информации, используемых на всем протяжении истории математики, в визуальную форму с акцентом на легко воспринимаемые, яркие и доступные элементы;
- облегчение процесса восприятия, усвоения и освоения обучающимися нового материала, с помощью которого показывается роль истории математики в математическом образовании;
- активное вовлечение обучающихся в процесс изучения истории математики, а при наличии интерактивных заданий возможность поднять мотивацию к обучению при восприятии новой информации;
- предотвращение возможных проблем у отсутствующих на занятиях обучающихся, поскольку у него будет возможность самостоятельно изучить и отработать материал с применением широкого спектра современных информационных средств;
- возможность использования при дистанционной форме обучения, что является весьма актуальным в настоящее время.

Например, в городе Москве более пяти лет реализуется проект «Московская Электронная Школа» (МЭШ) в рамках цифрового образования в школах Москвы. МЭШ качественно дополняет традиционную форму обучения, делая ее современной и высокотехнологичной. В рамках МЭШ существует также электронная среда библиотека «МЭШ», включающая в себя огромное количество электронных образовательных материалов, в том числе по истории математики, причем для разных уровней образования. Педагоги имеют возможность с помощью данной информационной платформы создавать и добавлять свои материалы по истории математики, демонстрировать созданные самостоятельно и другими педагогами материалы по истории математики во время проведения занятий.

Трудно отрицать тот факт, что изучение имеющихся исторических аналогов и осмысление методико-педагогического наследия отечественной педагогической науки и практики способны формировать профессиональные, научно-методических представления учащихся, а также способствовать пониманию ими целей и направлений модернизации математического образования.

Литература:

1. Александрова Е.В. Видеоурок как инновационная форма обучения в образовательном процессе // Сборник трудов Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Управление цифровой трансформацией общего и профессионального образования». г. Павлово, 3 марта 2021 г. С. 9-15.
2. Гильмуллин М.Ф. Формирование функциональной грамотности средствами истории математики // Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов. Материалы 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского. 2021. С. 296-300.
3. Дробышев Ю.А., Дробышева И.В. История математики в российских школьных учебниках: критический анализ // Вестник Набережночелнинского государственного педагогического университета. 2021. № S2 (31). С. 76-78.
4. Михайлов И.П. О видеообразовании в математике // Целевая подготовка кадров: направления, технологии и эффективность: материалы международной научно-практической конференции. Набережные Челны, 30 мая 2019 г. Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2019. С. 137-140.

Об авторе:

Тарас Ольга Борисовна, преподаватель, ГБПОУ «Колледж полиции», Москва, Россия

About the autor:

Olga B. Taras, teacher, Police College, Moscow, Russia

ISSN 2713-2730